A 3D surface plot with a blue-to-purple color gradient, showing a wavy surface. The plot is contained within a white wireframe box.

# ***Erstellung einer offiziellen österreichischen Rententafel***

***und deren Anwendung auf ein stochastisches Lebensversicherungsmodell***

Präsentation beim Workshop für junge Mathematiker der

**Deutschen Aktuarsakademie (DAA)**

Reisensburg, Günzburg, 22. September 2007



Reinhold Kainhofer

Institut f. Wirtschaftsmathematik, FG Finanz- und Versicherungsmathematik, TU Wien

reinhold@kainhofer.com

# Inhalt des Vortrages

---

- Erstellung der Rententafel AVÖ 2005R
  - Daten
  - Erstellung der Tafel
    - Basistafel, Selektionsfaktoren, Trends, Resultierende  $q(x)$  und  $q(y)$
  - Vergleiche (Lebenserwartung, Barwert, Prämie)
    - Sofort beginnende Leibrenten (zeitliche Entwicklung)
    - Aufgeschobene Renten (mit Rückgewähr)
  - Änderungen gegenüber AVÖ 1996R
  - Diverse Bemerkungen
- Das Markov-Modell in der Lebensversicherung
  - Gewinnbeteiligung
  - numerische Ergebnisse
- Diskussion / Fragen / Bemerkungen

# Sind neue Tafeln nötig?

Die letzten Rententafeln AVÖ 1996R haben ihr beabsichtigtes Alter erreicht (typischerweise 10 Jahre).

Manche Annahmen der AVÖ 1996R sind nicht eingetroffen:

- Zu wenige Sicherheitsabschläge für Modellrisiko / Parameterunsicherheit.
- Trendabschwächung nicht bemerkbar - im Gegenteil (bei hohen Altern).
- Benutzte Selektionseffekte für Männer scheinen zu gering.

Neue deutsche Tafeln DAV 2004-R im Vergleich (NEP einer 20 Jahre aufgeschobenen Rente, Bezug ab 65 Jahre, 2.75% Zins):

	AVÖ 1996R	DAV 2004-R	AVÖ in % von DAV
Männer	8.282	10.522	78.7%
Frauen	10.188	11.691	87.1%

# Allgemeines zur Tafelerstellung

**Ziel:** Erstellung einer Generationentafel (wie AVÖ 1996-R):

- ähnlicher Aufbau wie AVÖ 1996R hat (damit leicht zu implementieren)
- an aktuelle Daten angepasst
- **langlebig** (damit nicht in 10 Jahren wieder stark nachreserviert werden muss)
- Sicherheitszuschläge (Modellrisiko, Parameterunsicherheit, etc.)

**Allgemeiner Ablauf:**

1. Grundlagen 2. Ordnung (Basistafel, Trend): **Tatsächliche Versichertensterblichkeit** (Daten der Statistik Austria und Selektionseffekte wie in D)
2. Grundlagen 1. Ordnung: zusätzliche Sicherheitsabschläge für **Modellrisiko, Parameterunsicherheit, etc.**

Für das **Schwankungsrisiko** soll auch diesmal kein Effekt eingebaut werden, die Argumentation ist gleich wie bei der AVÖ 1996R.

Literatur: R. Kainhofer, M. Predota, U. Schmock: The new Austrian annuity valuation table AVÖ 2005R, Mitteilungen der AVÖ, Heft 13, S.55–136, April 2006.

# Datenmaterial

## Bevölkerungssterblichkeit (Statistik Austria)

- Volkssterbetafeln der **Volkszählungen seit 1870** (Alter bis 90 bzw. 100).
- Jährlich **fortgeschriebene rohe Sterbetafeln** seit 1947 (bis 2002). Altersgrenze 95 Jahre.
- Sterbetafel der **Volkszählung 2000/02** bis zum Alter von **112 Jahren**.

## Rentnerselektionseffekte

- **Keinerlei Aufzeichnungen in Österreich** vorhanden. Auch Daten der gesetzlichen Sozialversicherung standen diesmal nicht zur Verfügung.
- In Deutschland Aufzeichnungen der GenRe und der Münchner Rück über Rentenversicherungen der Jahre 1995 bis 2002. Außerdem Daten der gesetzlichen Rentenversicherung von 1986 bis 2002.
- In der Schweiz Beobachtungsdaten der Rentenversicherungen seit 1937 vorhanden.

# Allgemeine Formel der Rententafel

Formel für Sterbewahrscheinlichkeit  $q_J(x)$  einer  $x$ -jährigen Person im Jahr  $J$ :

$$q_J(x) = \underbrace{f_{Sel}(x) \cdot q_{2001}(x)}_{q_{G|E}^{(2001)}(x) \dots \text{Basistafel 2001}} \cdot e^{-G(J-2001)\lambda_x} [ \cdot f_{SR}(x) ], \quad (1)$$

$q_{2001}(x)$  ... offizielle Sterbetafel 2000/02

$f_{Sel}(x)$  ... Selektionsfaktor für Person im Alter  $x$

$G(J - 2001)$  ... langfristige Trendabschw. (in 100 J. halbiert, Grenzsterbl.)

$\lambda_x$  ... jährliche Verbesserung der Sterblichkeit (aus Trend seit 1972)

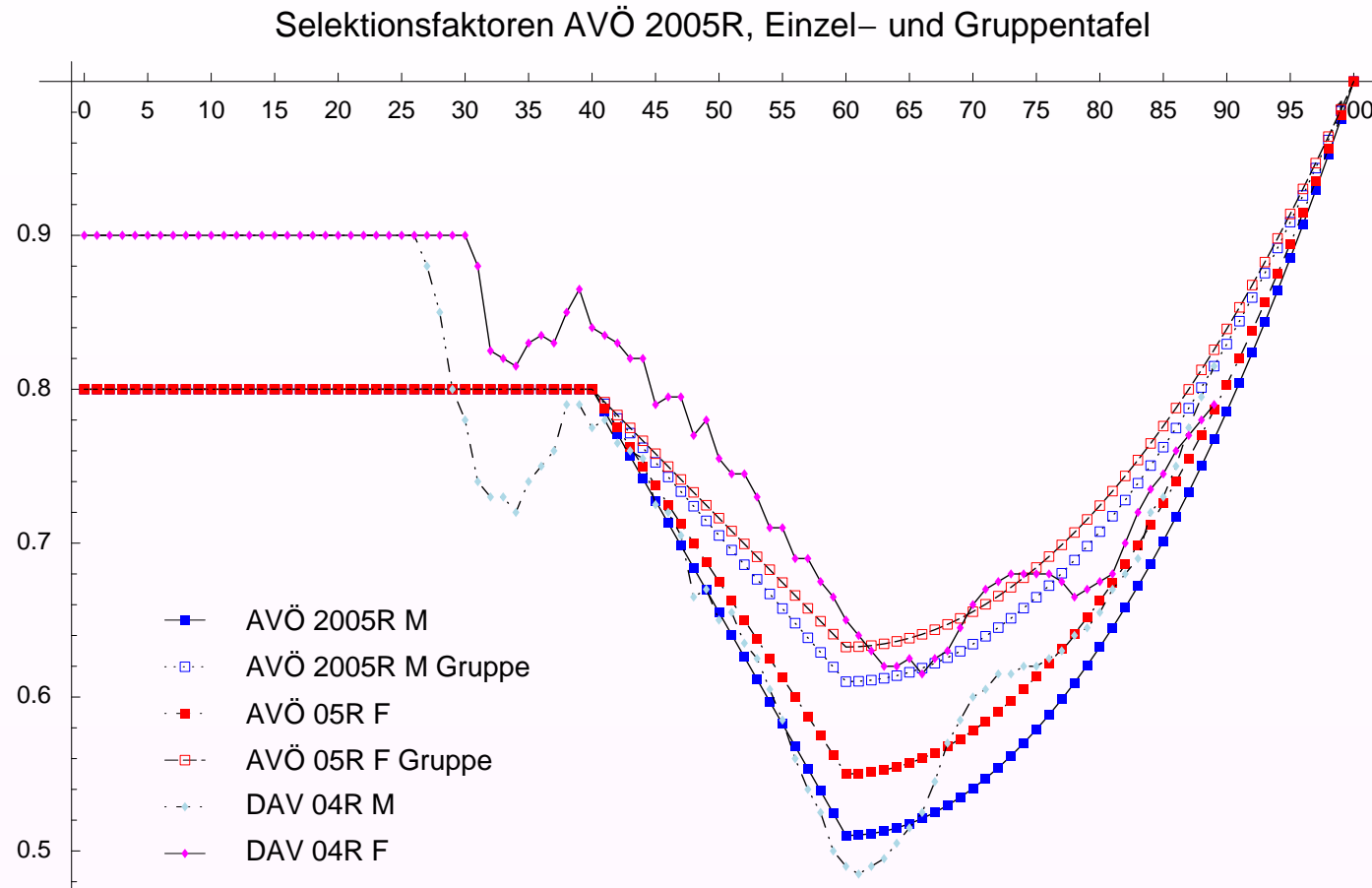
$f_{SR}(x)$  ... Abschlag für Schwankungsrisiko, nicht in den Tafeln

Trend ist Modifikation des Mittelfristtrends (seit 1972) der Gesamtbevölkerung, plus Sicherheitszuschläge (Modell-, Parameterunsicherheit) und Selektion.

$\lambda_x$  sind konstant und tabelliert, ebenso Basistafel 2001  $q_{G|E}^{(2001)}$ .

# Selektionsfaktoren

Daten nur aus Deutschland vorhanden, in der Schweiz keine Untersuchungen.



Form ist 1) **mathematisch einfach**, 2) passt gut zu **deutschen Kurven**, 3) bei AVÖ 1996R als guter Fit der Daten der gesetzlichen SV in Österreich erhalten

# Weitere Bemerkungen zu den Selektionsfaktoren

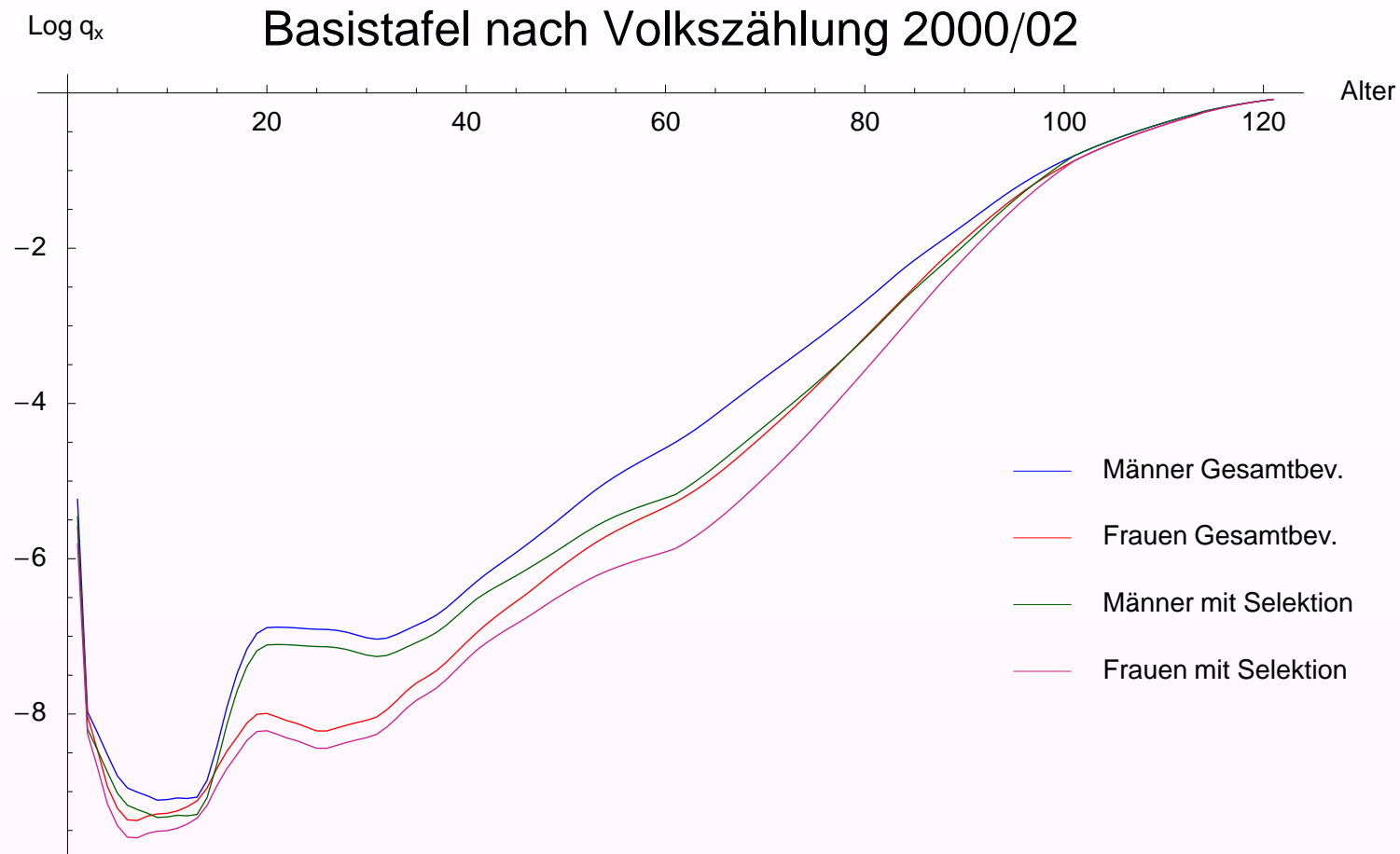
- **Selektion der Frauen** deutlich geringer als bei M. Mögliche Gründe:
  1. Frauen haben schon eine **geringe Sterblichkeit**, daher keine starke Selektion mehr möglich.
  2. Die Selektion orientiert sich stark am Ehemann, da viele Paare eine Rentenversicherung gemeinsam abschließen. Der Einfluss der Frau ist daher nicht so stark. Dies kann (bzw. wird voraussichtlich) sich in der Zukunft ändern, weshalb für Frauen die Selektionseffekte **zusätzlich erhöht** werden.
- In D zwei Tafeln: Selektionstafel (nur für Bezugszeit), in den ersten 5 Jahren des Bezugs mit zusätzlichem Selektionseffekt <sup>a</sup> (daher scheinbar geringere Selektionsfaktoren), und Aggregattafel über den ganzen Bestand (Bezug und Aufschub). Letztere wurde für die AVÖ 2005R benutzt (Ansonsten würde für jedes Rentenbeginnalter eine eigene Tafel benötigt).

---

<sup>a</sup>Faktor im 1. Jahr 0.67 (M) bzw. 0.71 (F), im 2.-5. Jahr 0.88 (M) und 0.80 (F)

# Basistafel 2000/02

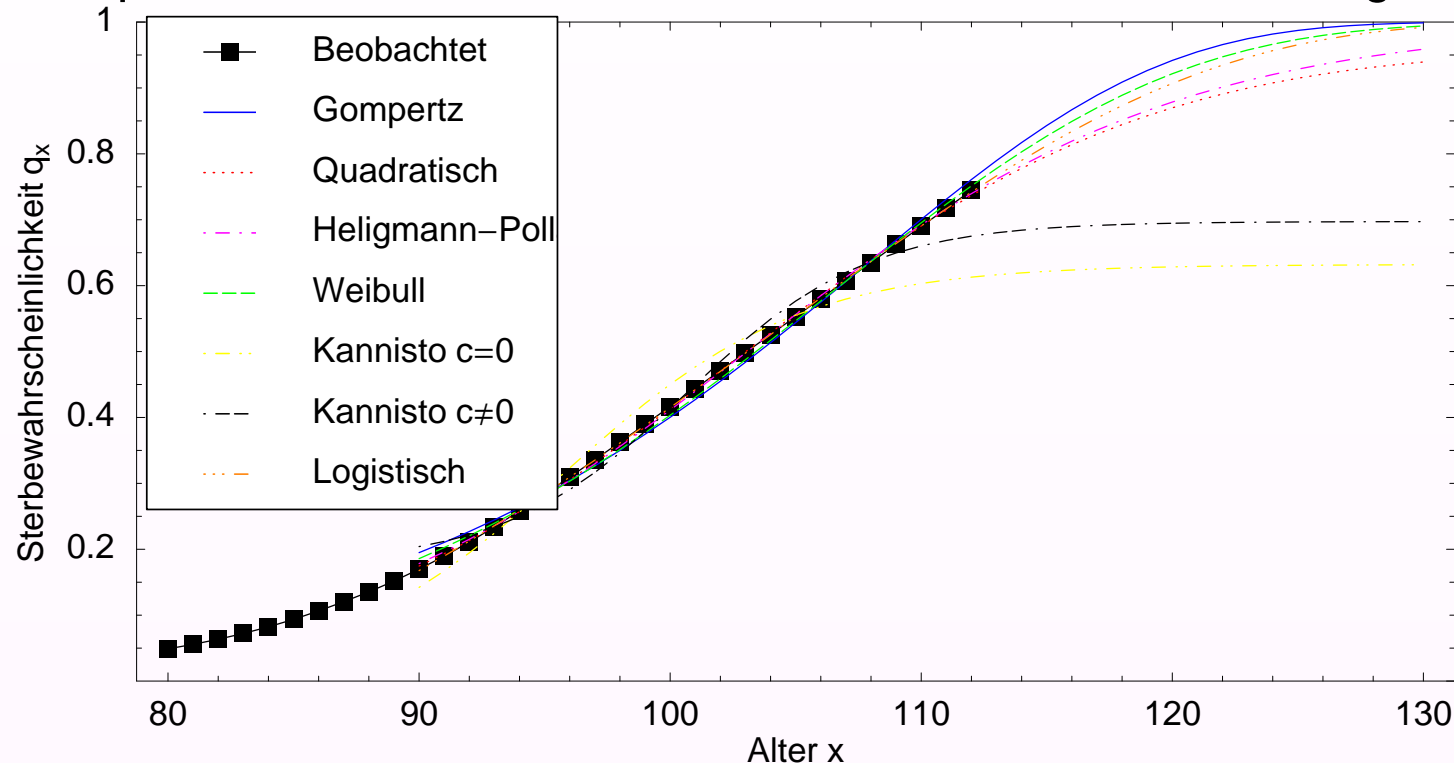
Als Basistafel  $q_{2001}(x)$  wird die Volkszählungstafel 2000/02 benutzt, die bis zum Alter 112 Jahre vorliegt. Darauf werden die Selektionsfaktoren angewendet:



# Extrapolation für sehr hohe Alter

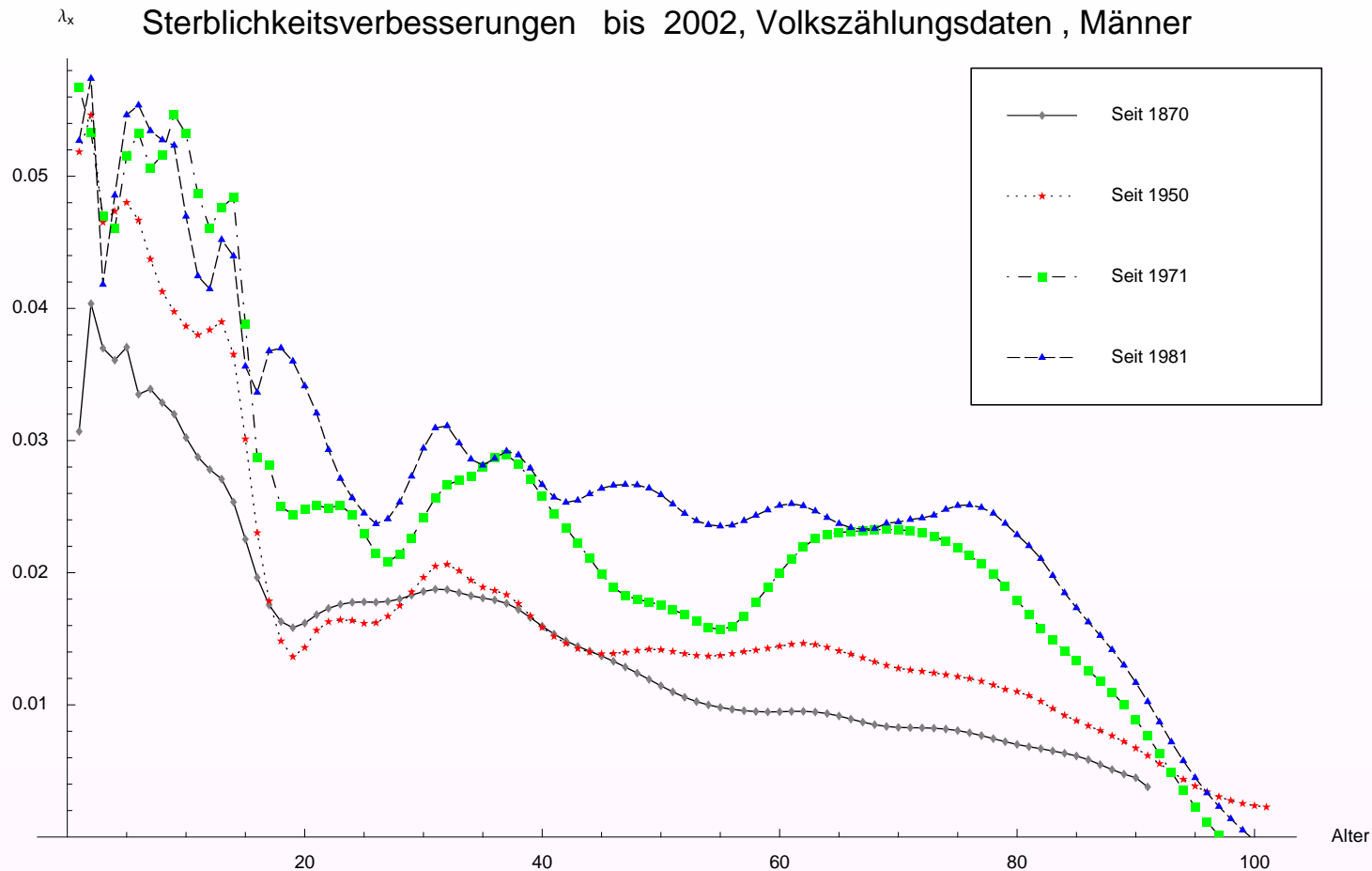
Der Vollständigkeit halber, genaue Wahl hat praktisch keinen Einfluss (außer auf Reserven, wenn jemand über 110 Jahren im Bestand).

Extrapolation für hohe Alter, Frauen, Daten der Volkszählung 2000/02



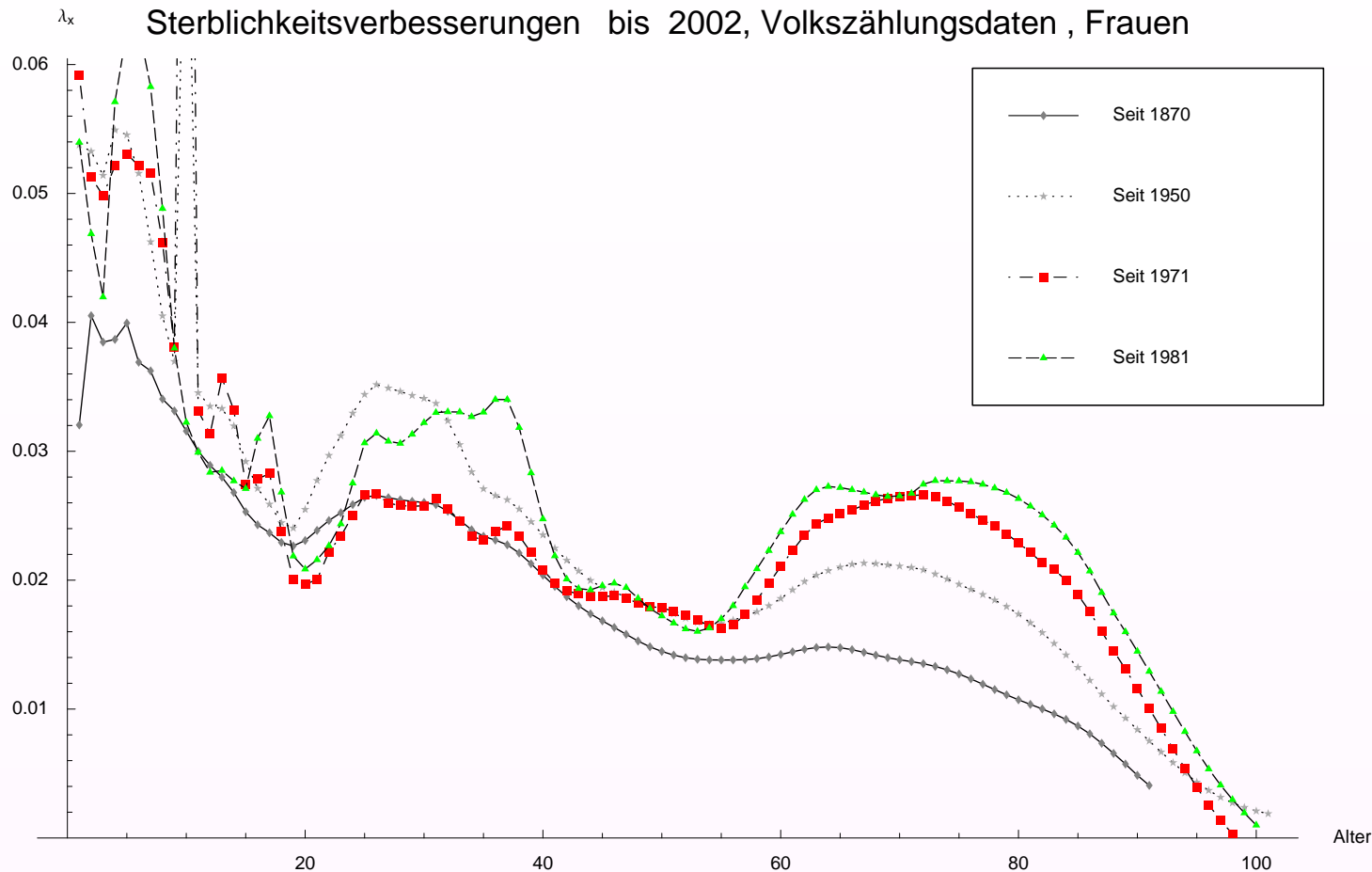
Bemerkung: Die Sterbewahrscheinlichkeiten für hohe Alter sind nach der neuen Volkszählung sogar gestiegen!

# Trendentwicklung (Volkszählungen), Männer



- "Mulde" bei 40-60 Jahren nur im Mittelfristtrend
- kein Trendrückgang

# Trendentwicklung (Volkszählungen), Frauen



- "Mulde" bei 40-60 Jahren, entspricht fast Langzeittrend!
- starke Ausprägung des "Buckels" für hohe Alter!

# Rohtrend seit 1972: Lee-Carter Methode

Rohdaten: **jährlich fortgeschriebene Sterbetafeln** bis 95 Jahre der Statistik Austria, 1972 bis 2002. (Daten seit 1947 vorhanden)

**Bi-lineare Zerlegung** der Sterbewahrscheinlichkeit in der Form:

$$\log q_x^{(t)} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_x^{(t)}$$

$\alpha_x$  ... allgemeine Form der Sterblichkeitskurve

$\kappa_t$  ... Zeittrend, als Zeitreihe angesehen

$\beta_x$  ... altersabhängiger Einfluss des Trends

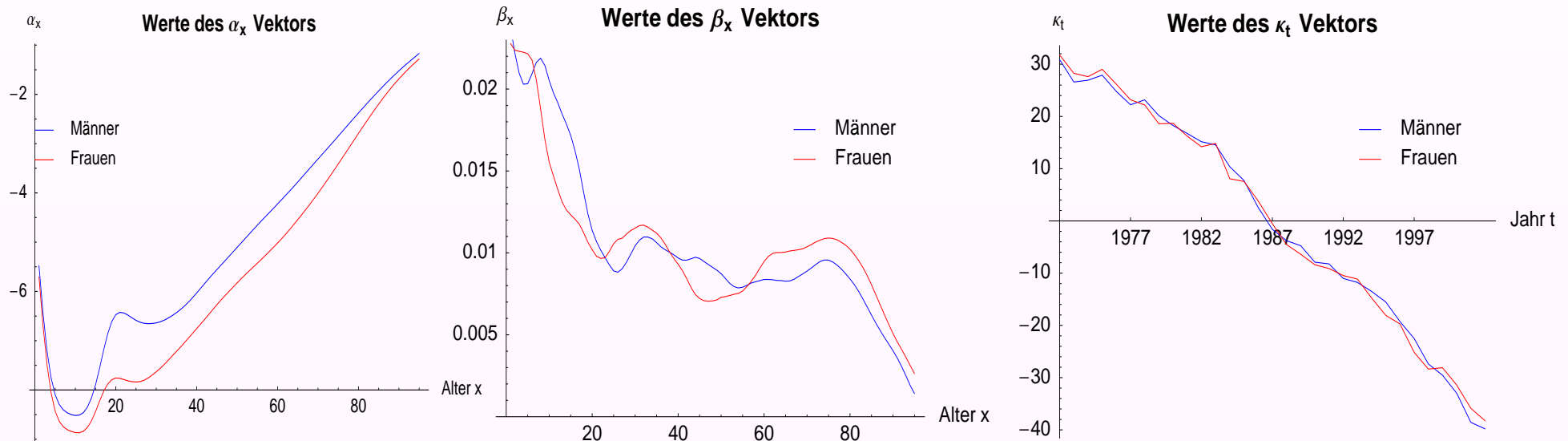
$\varepsilon_x^{(t)}$  ... normalverteilter Fehlerterm

- Bestimmung der  $\alpha_x$  **als Mittelwert** über den Betrachtungszeitraum.
- $Z_x^{(t)} = q_x^{(t)} - \alpha_x$  als Matrix aufgefasst, **Singulärwertzerlegung** ( $Z = L \cdot S \cdot R$ ), deren erster Term genau die Zerlegung in  $\beta_x \kappa_t$  liefert. Entspricht "ordinary least-squares" Fit an die Matrix.
- $\kappa_t$  als **Zeitreihe** angesehen (Random Walk mit Drift), die linear **extrapoliert** werden kann:  $\kappa_{2001+n} = \kappa_{2001} + n\Delta\kappa$

# Lee-Carter Zerlegung

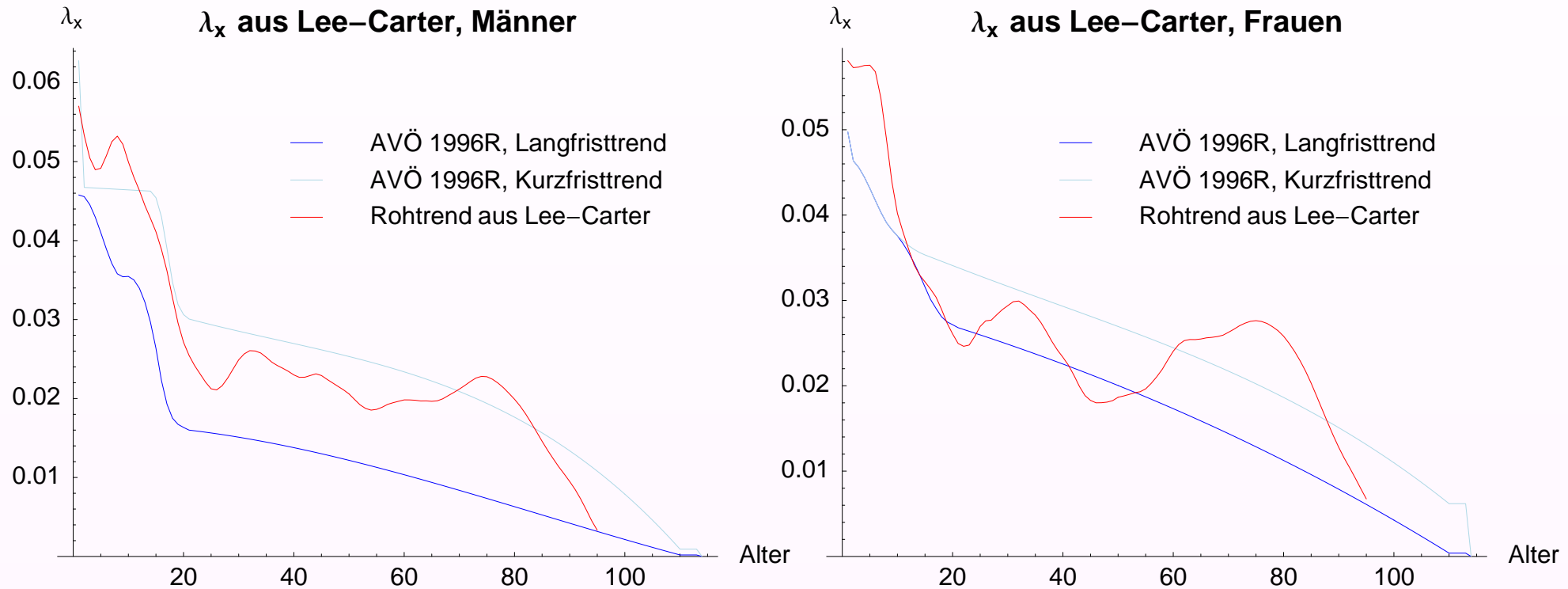
- Lee-Carter Methode vor allem in den USA und in GB standardmäßig.
- Lineare Extrapolation (ARIMA(0,1,0) Zeitreihe) entspricht dem Modell der AVÖ 1996R und der DAV 2004-R für Jahr  $J$ :

$$\hat{q}_x^{(J)} = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_{2001} + \beta_x \Delta \kappa \{J - 2001\})$$
$$= q_x^{(2001)} \exp(\lambda_x \{J - 2001\})$$



# Extrapolationsparameter $\lambda_x$ aus Lee-Carter

Aus der Lee-Carter Zerlegung ergeben sich folgende Parameter für die Gesamtbevölkerung, die noch an die Menge der Rentenversicherten angepasst werden müssen. Zum Vergleich sind hier schon die Parameter der AVÖ 1996R angegeben:



## Trend 2. Ordnung: tatsächlicher Versichertentrend

- **Rentenversicherte haben höheren Trend als Gesamtbevölkerung!**
- In CH (aus Daten seit 1958): Männer doppelt so starke Verbesserung, Frauen nur etwa 1.12 mal so starke Verbesserung. Z.B. für 70-jährige Männer:

Gesamtbevölkerung  $\lambda_{70} = 1.33\%$

Rentenversicherte  $\lambda_{70} = 2.41\%$

- In D: Vergleich Arbeiter vs. Angestellte (gesetzliche Rentenversicherung): Zuschlag von 0.2% auf Trend der Gesamtbevölkerung.
- Im Gegensatz zu D wird **kein Trendrückgang** angenommen (keine Anzeichen erkennbar, Trend hat in den letzten 10 Jahren sogar zugenommen). Dies entspricht zum Teil auch schon einem gewissen Sicherheitszuschlag.

# Versichertentrend $\lambda_x$

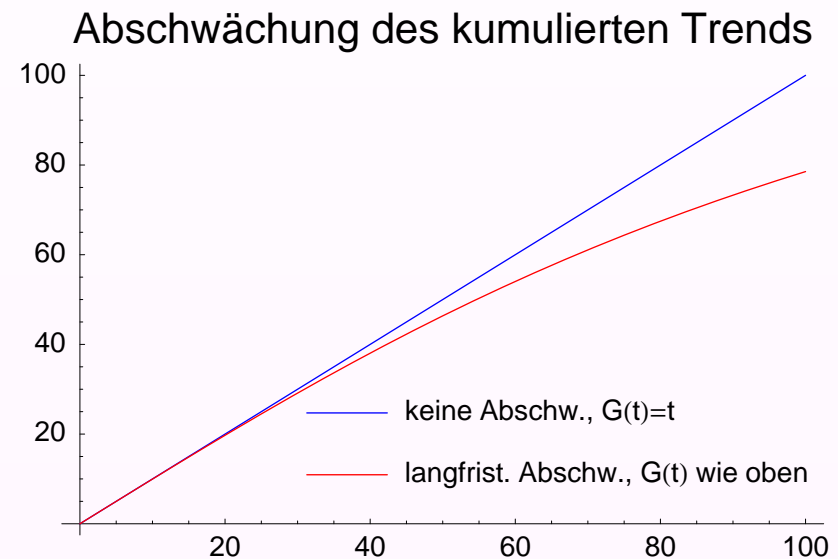
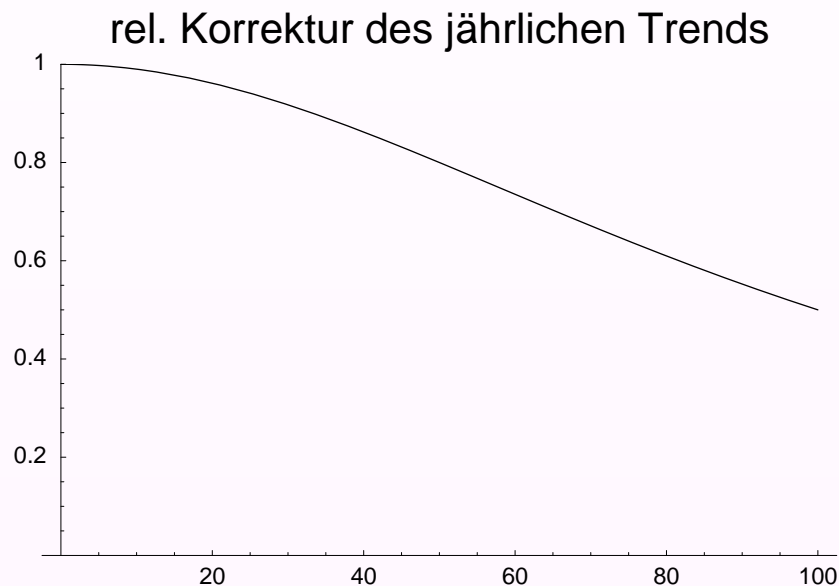
- Trend für **Gesamtbevölkerung** aus Rohdaten seit 1972
- Um **0.2% additiv** nach oben verschoben (soziale Selektion): roher Versichertentrend
- **Keine kurzfrist. Trendabschwächung**. Langfristig abschwächen des Trends (in 100 Jahren halbiert), dadurch erhält man Grenzsterbetafel. Geringer Einfluss auf Renten in der Lebensdauer der AVÖ 2005R.
- **Buckel bei hohen Altern** um 5 Jahre nach oben verschoben (medizinischer Fortschritt, bessere Altenversorgung)
- **Mulde** in den Trends linearisiert (Monotonie!)
- Für **Modellrisiko** (Bestimmungsfehler, bzw. Verstärkung): 0.3% additiver Aufschlag <sup>a</sup>, dafür kein zusätzlicher Abschlag auf Basistafel. (Verlegt die Sicherheit in die Zukunft.)
- Keine Beschränkung nach unten (in D: 1% führt zu Problemen ab 90 J.)

<sup>a</sup>In D: Bestimmt durch einen Knick in den kommenden 50 Jahren.

# Langfristige Trendabschwächung

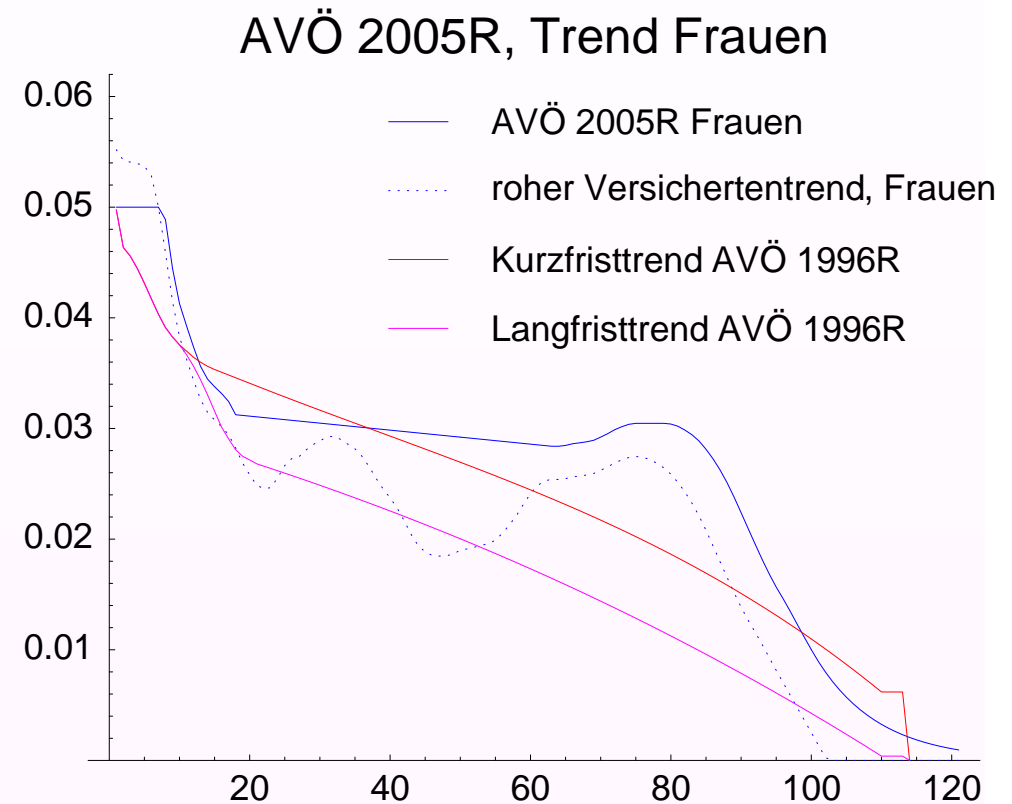
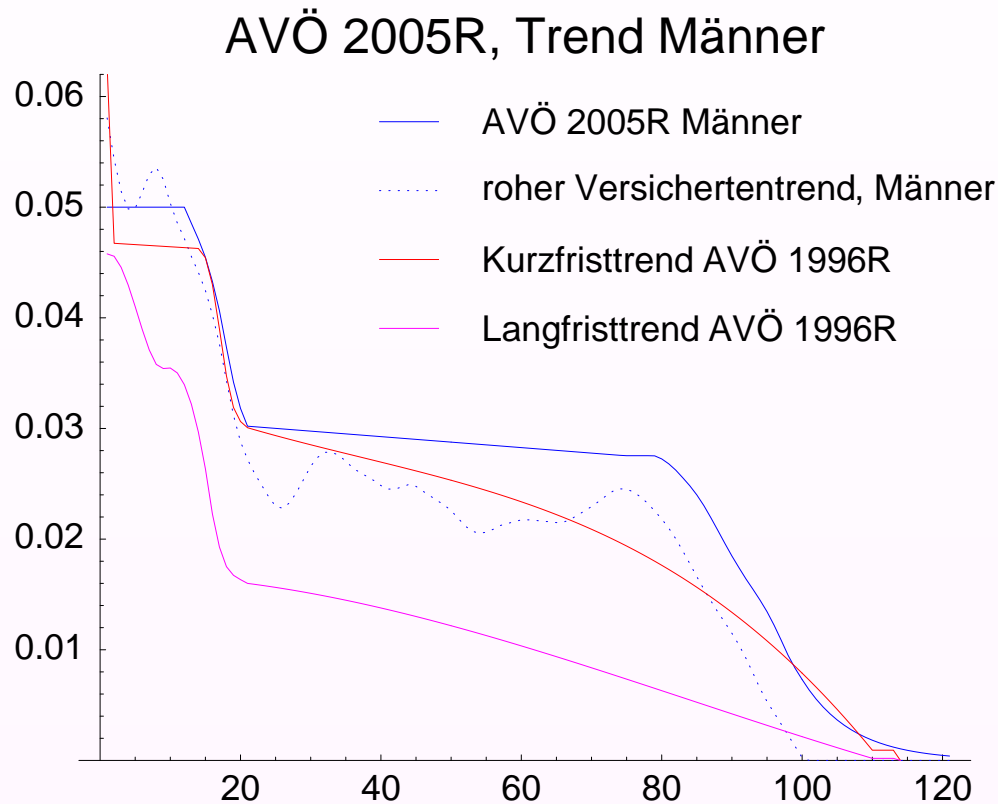
- Trend  $\lambda_x$  pro Jahr nicht zeitlich konstant. Jährliche Verbesserung nimmt nicht-linear ab auf  $\lambda_x^{(1)}(t) = \frac{\lambda_x}{1+(t/t_{1/2})^2}$  im Jahr 2001 +  $t$  mit  $t_{1/2} = 100$ .
- Kumulierter (aufintegrierter) Trend von 2001 bis ins Jahr 2001 +  $t$ :  

$$\tilde{\lambda}_x = \frac{t_{1/2}}{t} \arctan\left(\frac{t}{t_{1/2}}\right) \lambda_x^{(orig)} \text{ bzw. } G(t) = t_{1/2} \arctan\left(\frac{t}{t_{1/2}}\right)$$
- Grenzsterbetafel:  $G(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} t_{1/2}$ . Mittl. Lebenserwartung:  $\approx 102$  Jahre

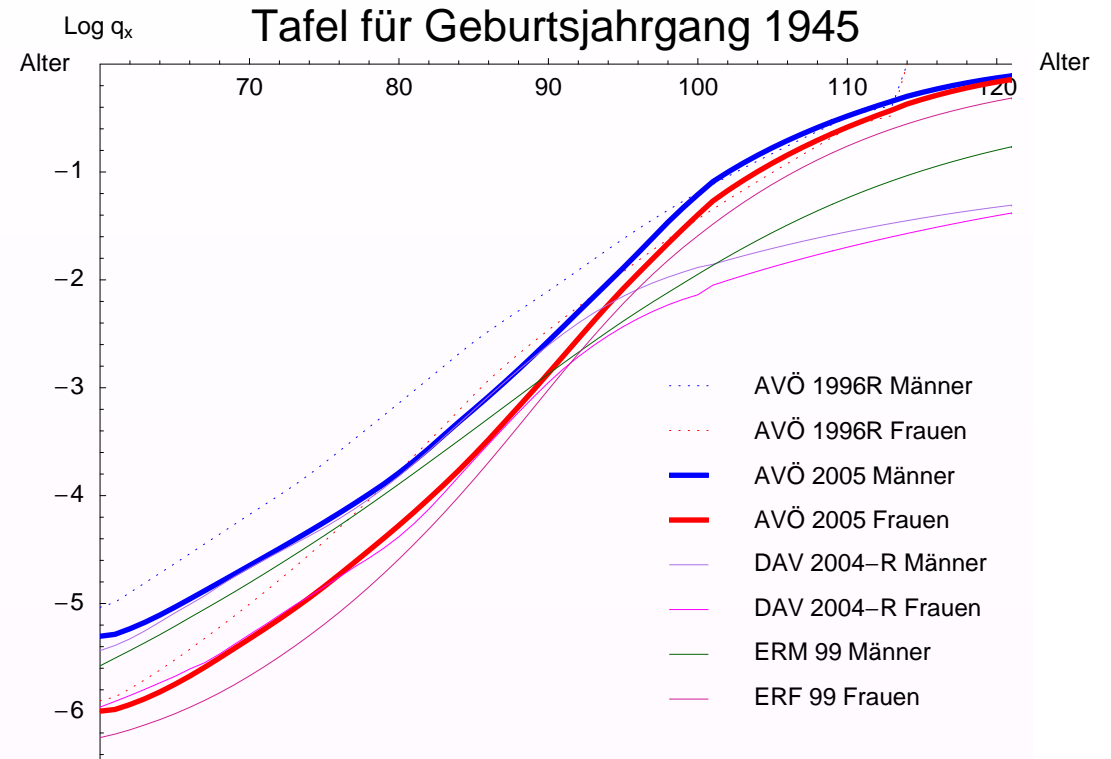
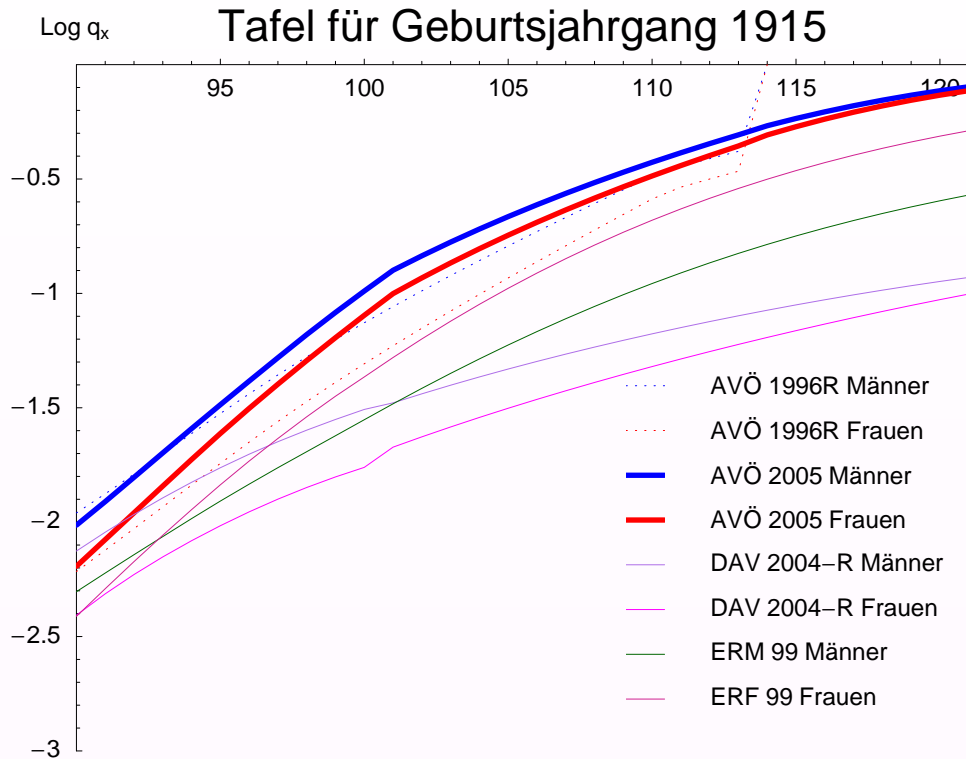


# Trendvergleich AVÖ 2005R mit AVÖ 1996R

- Starke Trendzunahme (vor allem im Altersbereich 60 bis 90 Jahre) gegenüber der AVÖ 1996R.
- Für Einzel- und Gruppentafel wird derselbe Trend benutzt.

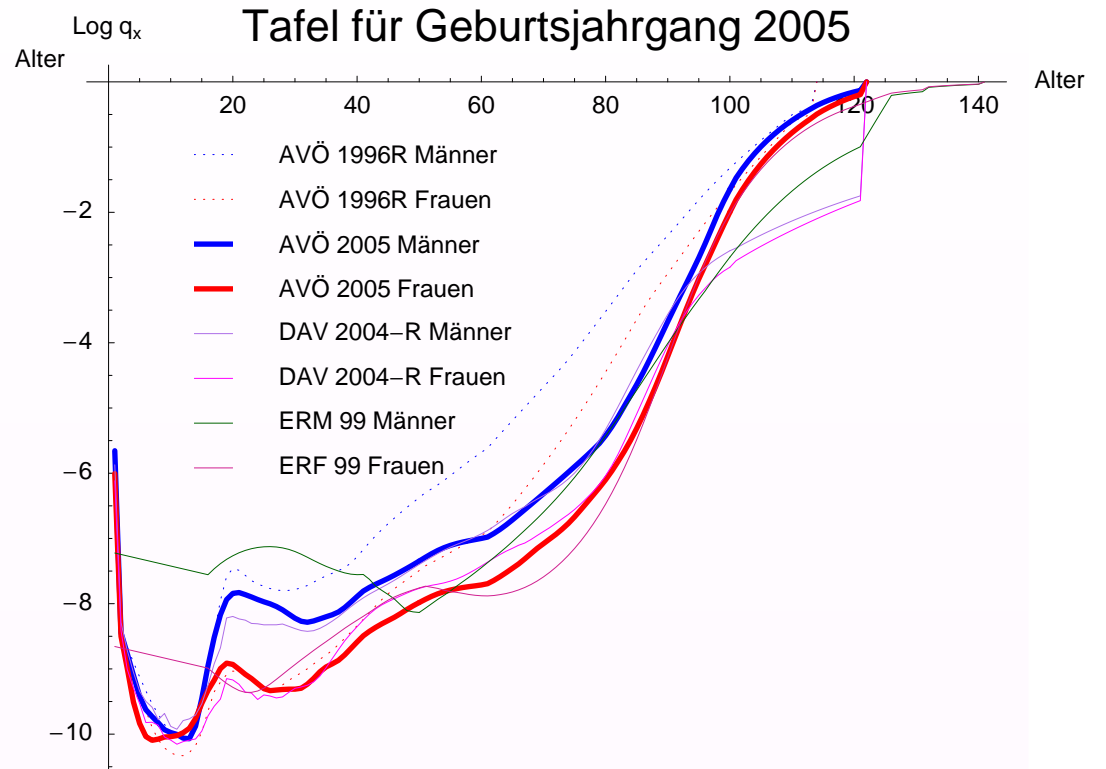
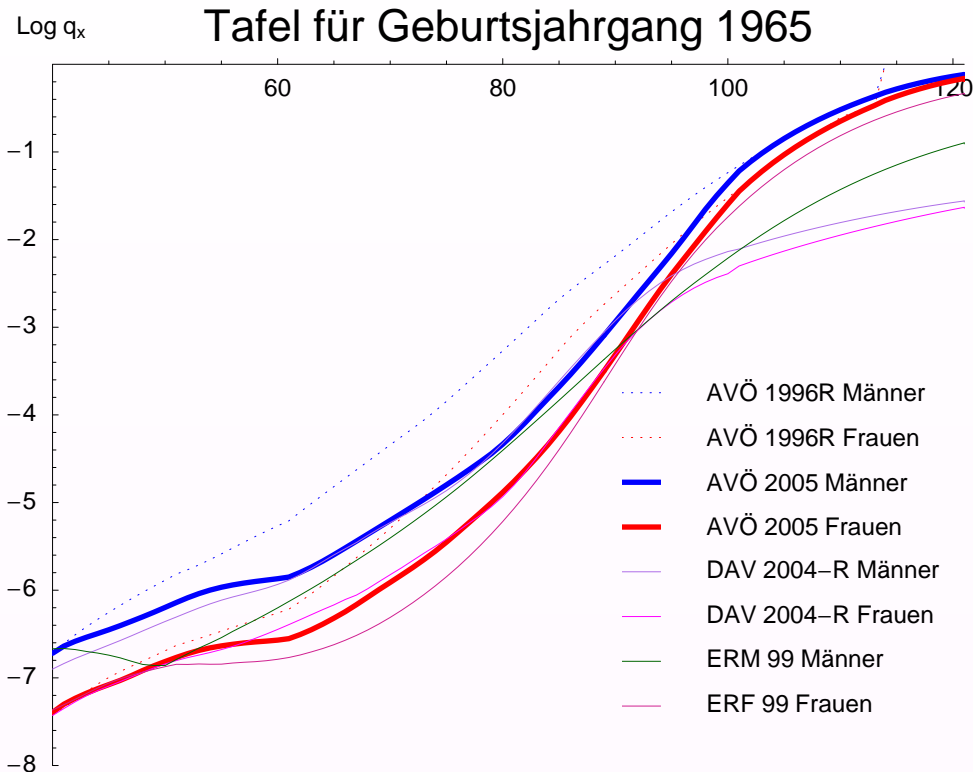


# Generationenenersterbetafeln 1915 und 1945



- Sterbewahrscheinlichkeiten nehmen tw. im Vergleich zur AVÖ 1996R sogar zu. Dies ist auch auf die Steigung (in den Altern über 100 Jahren) in den offiziellen Sterbetafeln zurückzuführen.
- Sterbewahrscheinlichkeiten fast ausschließlich über deutschen Werten

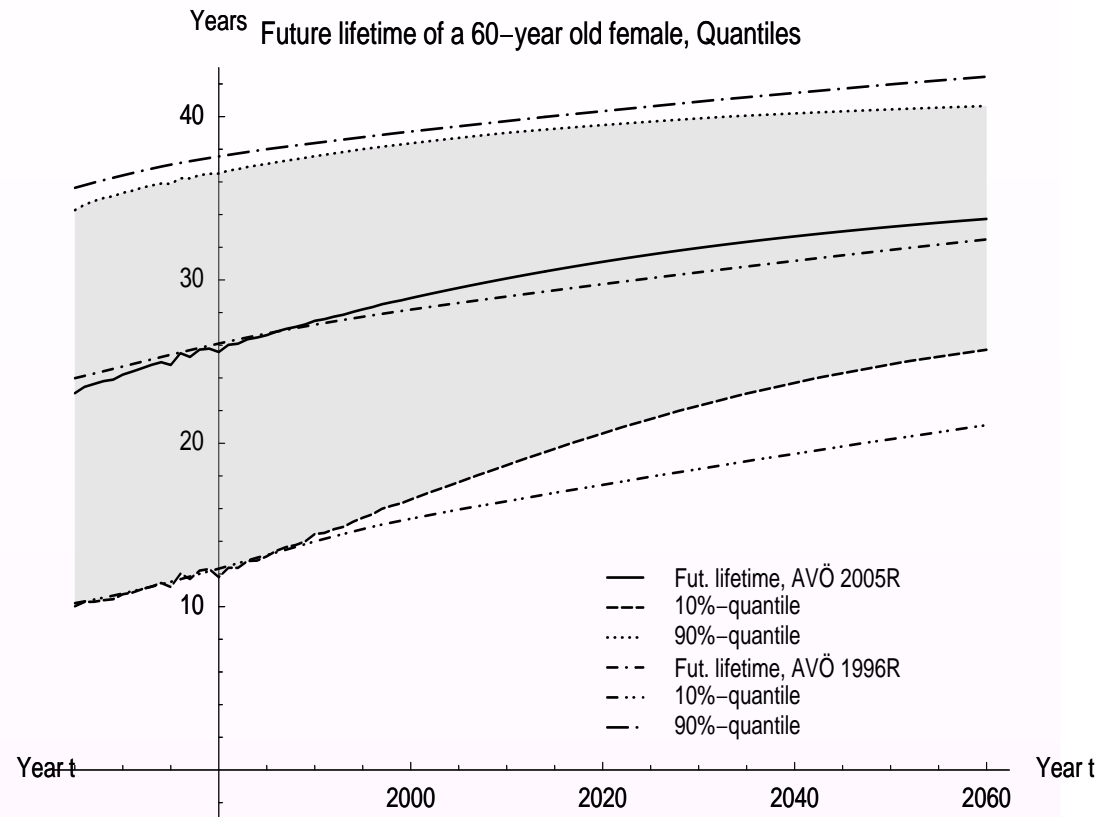
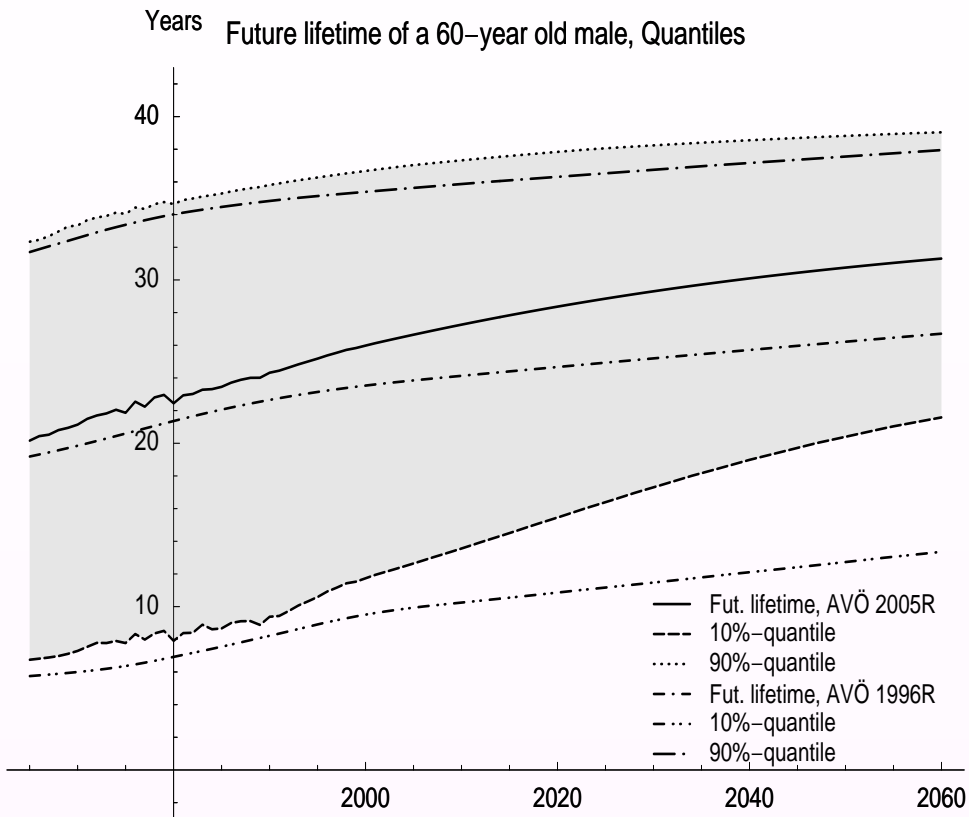
# Generationenenebensterbetafeln 1965 und 2005



- Logarithmen der Sterbewahrscheinlichkeiten **nicht mehr linear** (im Bereich 30 bis 80/90 Jahre). Diese Eigenschaft wäre für Altersverschiebung erwünscht...

# Entwicklung der Lebenserwartung

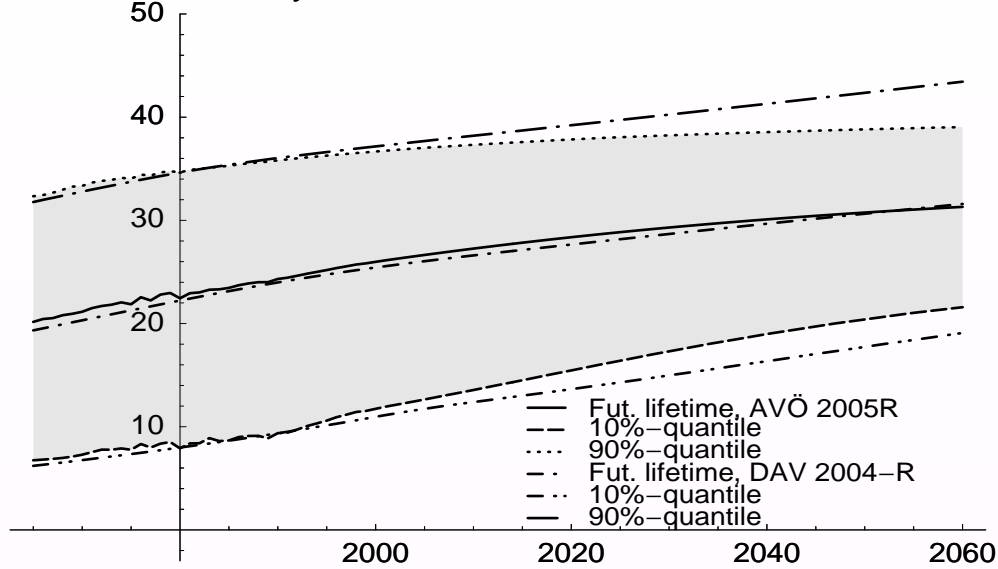
Lebenserwartung von Rentenversicherten (Basistafel und Trend 2. Ordnung):



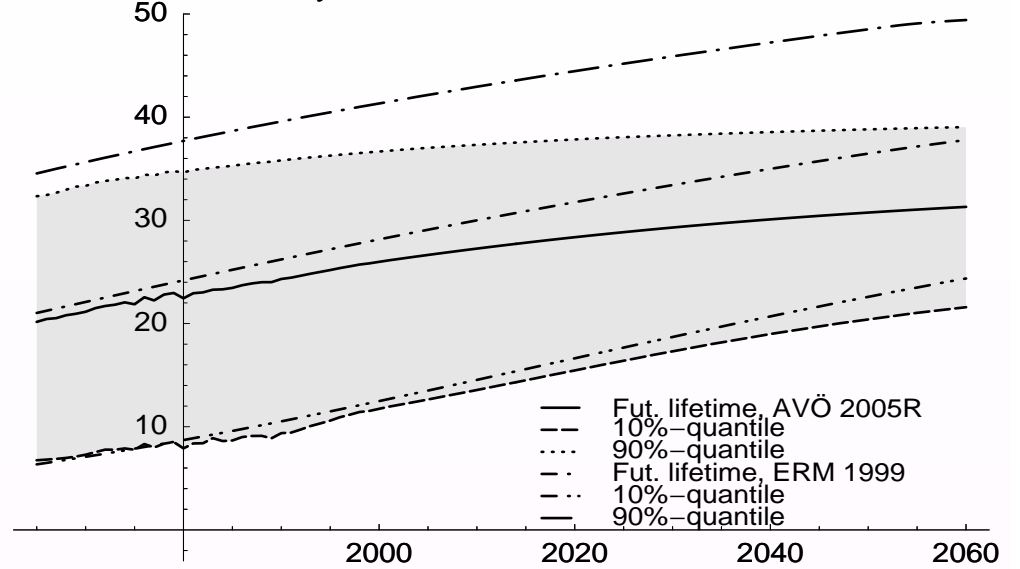
- Unterschied im Trend stark bemerkbar
- Bei Männern Unterschied in den Selektionsfaktoren

# Internationaler Vergleich

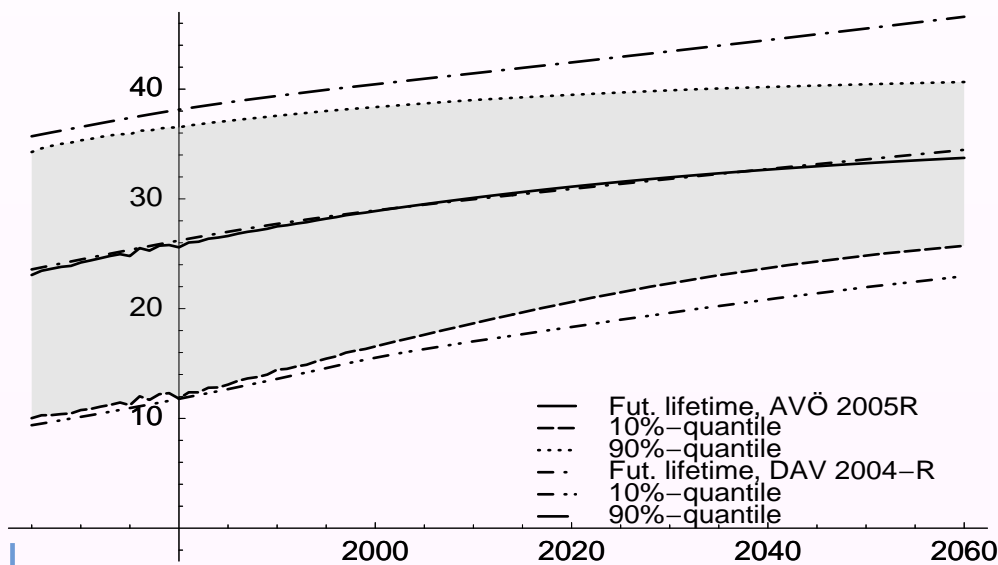
Fut. lifetime, 60-year old male, AVÖ 2005R vs. DAV 2004-R



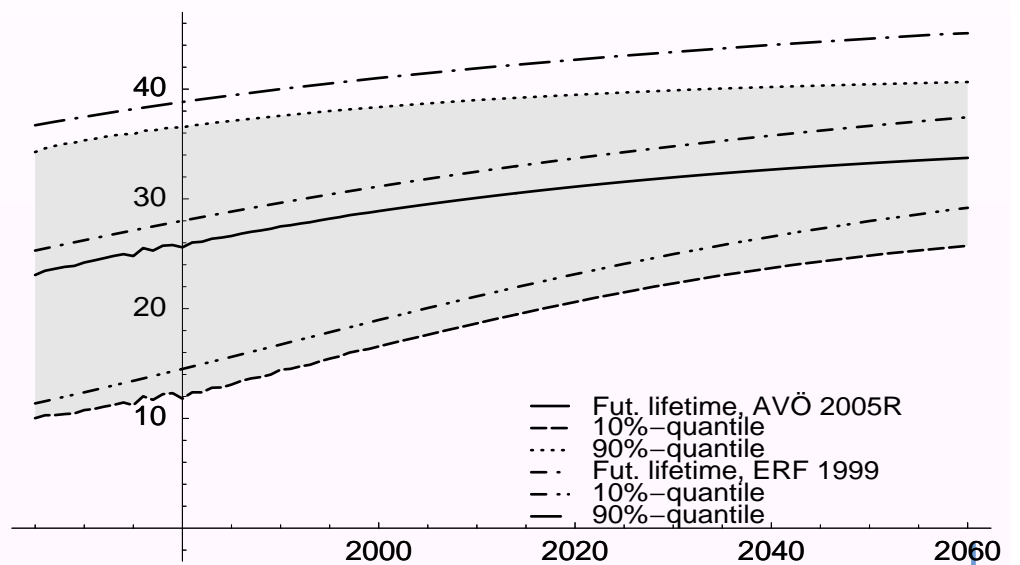
Fut. lifetime, 60-year old male, AVÖ 2005R vs. ERM 1999



Fut. lifetime, 60-year old female, AVÖ 2005R vs. DAV 2004-R



Fut. lifetime, 60-year old female, AVÖ 2005R vs. ERF 1999



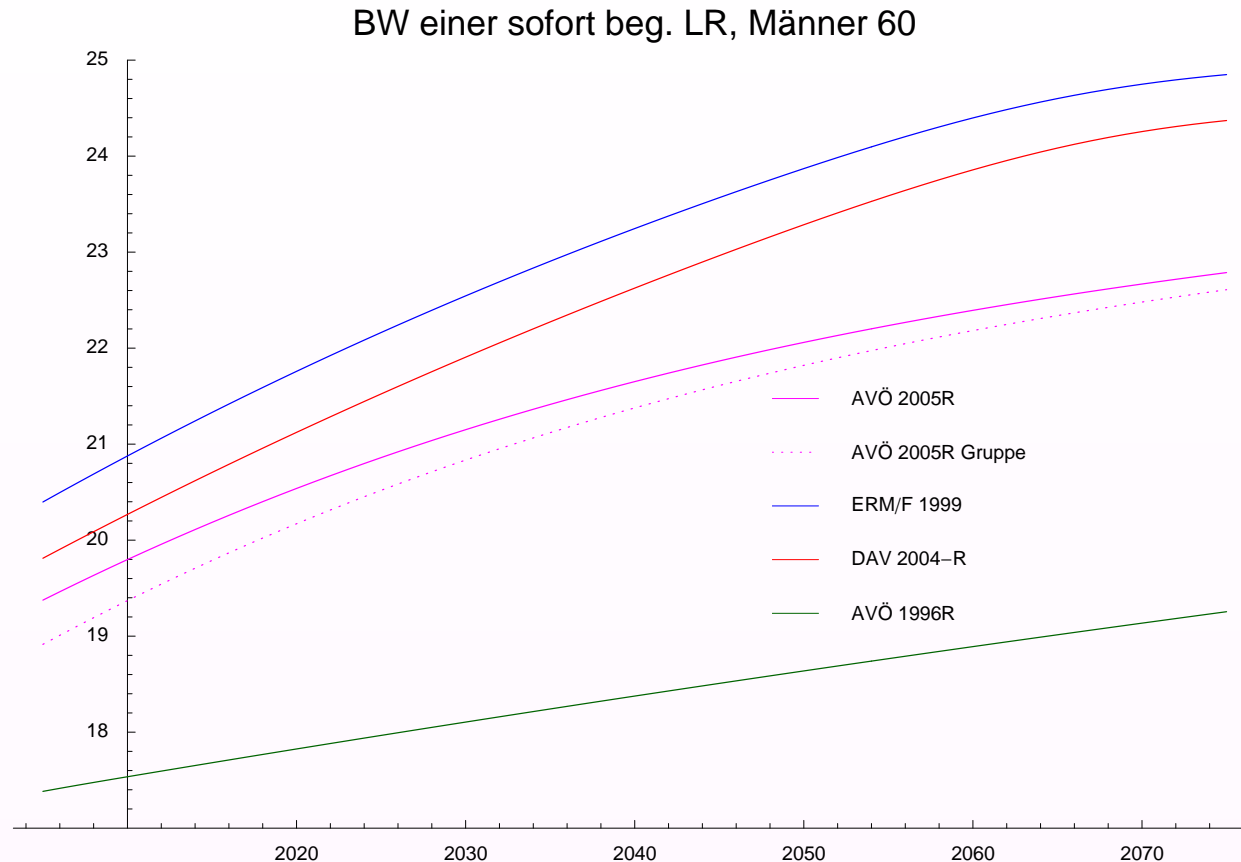
# Schwankungsrisiko?

- Das Schwankungsrisiko ist in den Tafeln **nicht berücksichtigt**.  
Argumentation dafür wie bei AVÖ 1996R.
- Gründe:
  - Keine Daten in Österreich vorhanden, **geringe Bestände**
  - Statistischer Schwankungszuschlag wäre **zu groß!**
  - Wegen geringer Bestände hängt Zuschlag stark von der **Größe des Unternehmens** ab  $\Rightarrow$  Kleine Unternehmen würden benachteiligt.
  - Die Schadensverteilung ist sehr schief, das **Risikokapital** ist (im Vergleich zu Ablebensversicherungen) **relativ gering**.
  - Geringer Einfluss auf die Barwerte
- Berücksichtigung des SR in entsprechender Höhe ist Aufgabe des **jeweiligen Aktuars** (wie bei AVÖ 1996R).

# Vergleich ausgewählter Barwerte und Prämien

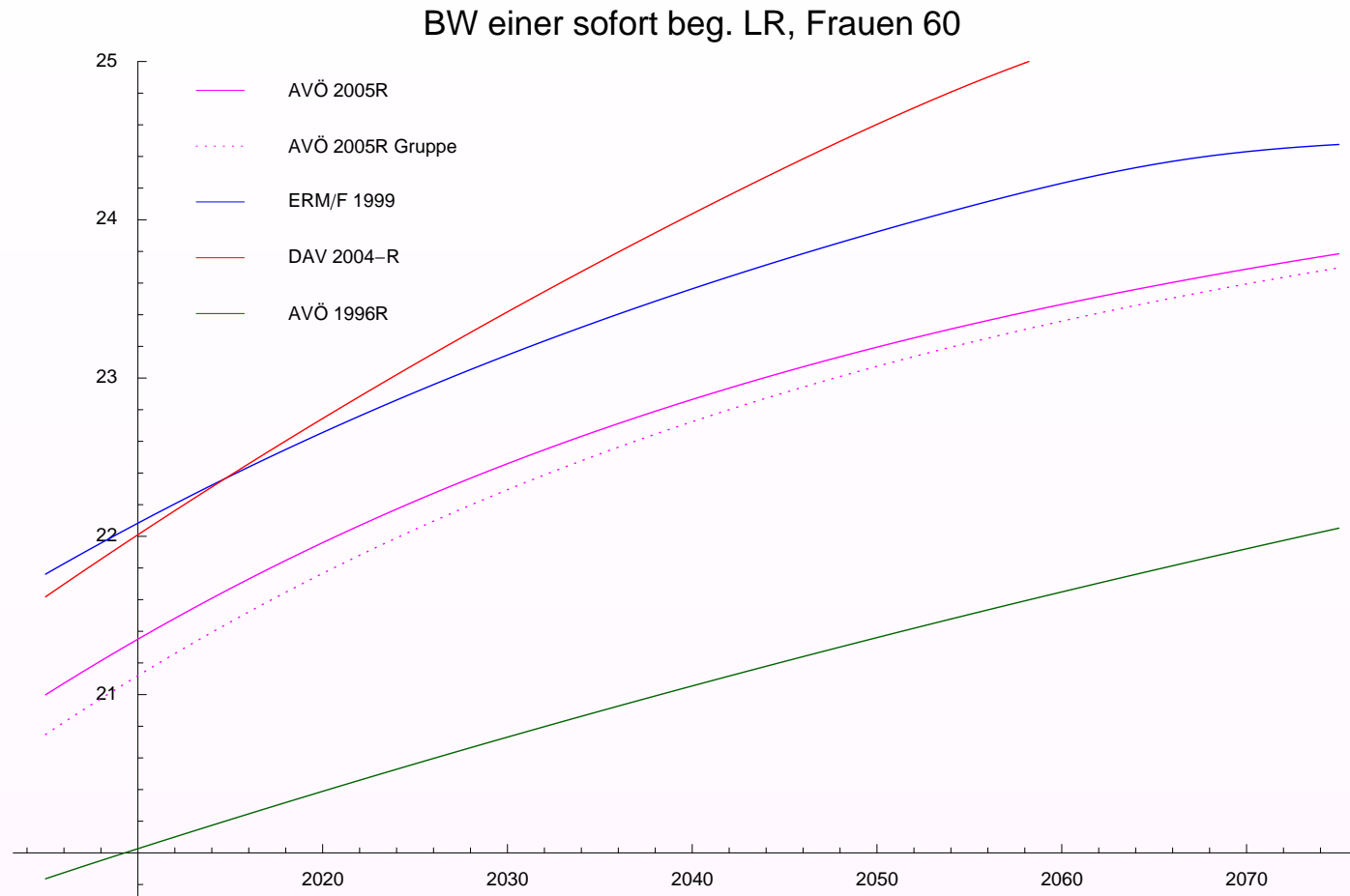
- Abschluss der Rente (wenn nicht anders angegeben) 2005
- Zinssatz: 2.75% (wie auch in der Publikation zur DAV 2004-R angenommen)
- Zum Vergleich jeweils BW in folgender Reihenfolge:
  - AVÖ 2005R
  - AVÖ 1996R
  - DAV 2004-R (Deutschland)
  - ERM/F 1999 (Schweiz)
  - Steigung der AVÖ 2005R im Verhältnis zu AVÖ 1996R
- Achtung: DAV 2004-R und ERM/F 1999 beinhalten jeweils einen Zuschlag für das **statistische Schwankungsrisiko**, die AVÖ 2005R nicht!
- Durch Rückgewähr ist Sterblichkeit in Aufschubzeit fast irrelevant  $\implies$  Prämien proportional zu NEP von sofort beginnender Leibrente

# Sofort beginnende LR an 60-jährigen Mann



- BW steigen gegenüber AVÖ 1996R stark an, liegen stark unter DAV 2004-R und ERM 1999.
- DAV 2004-R hat einen noch stärkeren Trend als AVÖ 2005R

# Sofort beginnende LR an 60-jährige Frau



- BW steigen gegenüber AVÖ 1996R stark an, liegen stark unter DAV 2004-R und ERF 1999.
- DAV 2004-R hat einen noch stärkeren Trend als AVÖ 2005R

# Altersabhängigkeit, sof. beg. LR (2005), Männer

	AVÖ05R	AVÖ96R	DAV04R	DAV94R	ERM99	AVÖ05/96	AVÖ05/DAV	AVÖ05/ERM	DAV04/94R
40	27.0346	25.1816	27.5123	25.9547	28.0245	1.07359	0.982639	0.964678	1.06001
45	25.4336	23.4807	25.9158	24.2315	26.5164	1.08317	0.981394	0.959167	1.06951
50	23.6311	21.6241	24.1121	22.3367	24.7326	1.09281	0.98005	0.955463	1.07948
55	21.6295	19.5941	22.0896	20.2556	22.6861	1.10388	0.979171	0.953423	1.09054
60	19.3753	17.3832	19.8115	18.0291	20.3975	1.11459	0.97798	0.949883	1.09886
65	16.8503	15.022	17.2864	15.6385	17.8937	1.12171	0.974775	0.94169	1.10537
70	14.1686	12.6066	14.6298	13.1707	15.2434	1.12391	0.968474	0.929491	1.11079
75	11.4183	10.1887	11.9434	10.7386	12.5572	1.12069	0.956038	0.909305	1.11219
80	8.73343	7.93032	9.3285	8.56069	9.98444	1.10127	0.936209	0.874703	1.08969
85	6.3626	6.02063	7.02915	6.84235	7.68164	1.0568	0.905173	0.828286	1.0273
90	4.42705	4.4903	5.28961	5.67053	5.76763	0.985913	0.836932	0.767567	0.932826
95	2.99632	3.29145	4.1158	4.84383	4.29731	0.910333	0.728003	0.697253	0.8497
100	2.11175	2.46647	3.33531	4.11783	3.21362	0.856185	0.63315	0.657127	0.809968

- BW nimmt bei hohen Altern wieder ab im Vergleich zur AVÖ 1996R.
- Prozentuelle Steigung etwas stärker als in D (DAV 1994-R hatte schon Risikozuschläge).
- BW liegt deutlich unter Werten nach DAV und ERM.

# Altersabhängigkeit, sof. beg. LR (2005), Frauen

	AVÖ05R	AVÖ96R	DAV04R	DAV94R	ERF99	AVÖ05/96	AVÖ05/DAV	AVÖ05/ERM	DAV04/94R
40	28.1574	27.1611	28.657	27.7042	28.5863	1.03668	0.982565	0.984997	1.03439
45	26.7054	25.6344	27.2318	26.2046	27.2174	1.04178	0.98067	0.98119	1.0392
50	25.0496	23.9243	25.6028	24.516	25.6546	1.04703	0.978391	0.976415	1.04433
55	23.1662	22.0037	23.7407	22.5871	23.8503	1.05283	0.9758	0.971316	1.05108
60	20.9987	19.8363	21.6178	20.4101	21.761	1.0586	0.971363	0.964971	1.05917
65	18.5128	17.4169	19.2246	17.9751	19.3658	1.06292	0.962973	0.955952	1.06951
70	15.7554	14.8111	16.5799	15.3673	16.675	1.06376	0.950275	0.944855	1.0789
75	12.8072	12.0994	13.7835	12.6664	13.7503	1.0585	0.929174	0.931412	1.08819
80	9.83423	9.43289	10.9353	10.0423	10.7392	1.04255	0.89931	0.915729	1.08893
85	7.08386	7.06125	8.29317	7.76472	7.90386	1.0032	0.85418	0.896253	1.06806
90	4.83928	5.2001	6.2698	6.05495	5.56607	0.930614	0.77184	0.869425	1.03548
95	3.23056	3.76875	4.90299	4.91745	3.90557	0.857197	0.658896	0.827168	0.997059
100	2.24519	2.76726	3.86188	4.05276	2.82885	0.811342	0.581373	0.793679	0.952902

- BW nimmt bei hohen Altern wieder ab im Vergleich zur AVÖ 1996R.
- Prozentuelle Steigung etwa gleich wie in D, geringer als bei Männern.
- BW liegt deutlich unter Werten nach DAV und ERM.

# BW sof. beg. LR, Männer (AVÖ 05R, 96R, DAV04R und Anstieg von 96R)

	40	45	50	55	60	65	70	75
2005	2703.46	2543.36	2363.11	2162.95	1937.53	1685.03	1416.86	1141.83
	2518.16	2348.07	2162.41	1959.41	1738.32	1502.2	1260.66	1018.87
	2751.23	2591.58	2411.21	2208.96	1981.15	1728.64	1462.98	1194.34
	1.07359	1.08317	1.09281	1.10388	1.11459	1.12171	1.12391	1.12069
2015	2752.23	2600.4	2428.57	2236.24	2018.51	1773.2	1508.73	1231.98
	2543.43	2375.38	2191.13	1988.97	1768.15	1531.56	1288.29	1043.75
	2808.19	2656.62	2484.43	2290.22	2070.49	1825.27	1562.35	1288.86
	1.08209	1.09473	1.10837	1.12432	1.14159	1.15777	1.17111	1.18034
2025	2791.02	2646.15	2481.61	2296.39	2085.97	1847.88	1588.12	1311.7
	2567.18	2401.12	2218.31	2017.07	1796.62	1559.62	1314.7	1067.43
	2859.03	2714.95	2550.5	2364.07	2152.27	1914.47	1655.39	1379.64
	1.08719	1.10205	1.1187	1.13848	1.16105	1.18482	1.20797	1.22884
2035	2821.82	2682.67	2524.27	2345.24	2141.37	1910.04	1655.27	1380.51
	2589.6	2425.55	2244.26	2044.07	1824.17	1586.97	1340.63	1090.84
	2903.8	2767.27	2610.32	2431.38	2227.3	1996.91	1742.55	1466.78
	1.08967	1.10601	1.12477	1.14734	1.17389	1.20358	1.2347	1.26555
2045	2846.37	2711.88	2558.55	2384.77	2186.6	1961.28	1711.36	1438.98
	2610.79	2448.74	2269.03	2070.01	1850.8	1613.58	1366.06	1113.97
	2939.58	2812.06	2663.62	2492.65	2296.34	2073.34	1824.41	1550.45
	1.09023	1.10746	1.1276	1.15206	1.18143	1.21548	1.25278	1.29176

# BW von sof. beg. LR, Frauen (AVÖ 05R, 96R, DAV04R und Anstieg von 96R)

	40	45	50	55	60	65	70	75
2005	2815.74	2670.54	2504.96	2316.62	2099.87	1851.28	1575.54	1280.72
	2716.11	2563.44	2392.43	2200.37	1983.63	1741.69	1481.11	1209.94
	2865.7	2723.18	2560.28	2374.07	2161.78	1922.46	1657.99	1378.35
	1.03668	1.04178	1.04703	1.05283	1.0586	1.06292	1.06376	1.0585
2015	2851.34	2713.12	2555.08	2374.75	2167.	1928.31	1661.3	1371.
	2742.84	2593.27	2425.01	2235.41	2021.03	1781.12	1521.25	1248.91
	2911.04	2775.69	2620.5	2442.38	2238.53	2007.68	1750.13	1472.54
	1.03956	1.04621	1.05364	1.06233	1.07222	1.08264	1.09206	1.09776
2025	2879.65	2747.17	2595.47	2422.04	2222.22	1992.5	1733.91	1449.13
	2767.25	2620.68	2455.17	2268.13	2056.26	1818.54	1559.66	1286.48
	2951.93	2823.19	2675.12	2504.62	2308.85	2086.24	1835.87	1561.73
	1.04062	1.04826	1.05714	1.06786	1.08071	1.09566	1.11172	1.12644
2035	2902.2	2774.38	2627.91	2460.29	2267.24	2045.29	1794.36	1515.36
	2789.62	2645.95	2483.2	2298.79	2089.54	1854.19	1596.6	1323.
	2987.75	2865.93	2724.79	2561.5	2373.42	2158.79	1915.75	1646.18
	1.04036	1.04854	1.05828	1.07025	1.08504	1.10306	1.12386	1.1454
2045	2920.29	2796.24	2654.05	2491.23	2303.84	2088.48	1844.24	1570.8
	2810.18	2669.29	2509.26	2327.52	2120.97	1888.13	1632.09	1358.44
	3014.77	2901.38	2768.5	2613.12	2432.82	2225.96	1990.31	1726.19
	1.03918	1.04756	1.0577	1.07034	1.08622	1.10611	1.12999	1.15633

# Prämien von aufg. Renten mit Rückgewähr

Vertragsabschluss 2005, Bezugsalter 65 Jahre, 2.75% Zins

M	AVÖ05R	AVÖ96R	DAV 1994R	DAV 2004R	ERM 1999	AVÖ05/AVÖ96	AVÖ05/ERM99	AVÖ05/DAV04	DAV04/DAV94
25	0.264451	0.21444	0.234464	0.279863	0.289534	23.32%	-8.66%	-5.51%	19.36%
30	0.323331	0.263916	0.286873	0.34017	0.35228	22.51%	-8.22%	-4.95%	18.58%
35	0.402509	0.331166	0.357805	0.42117	0.436426	21.54%	-7.77%	-4.43%	17.71%
40	0.513967	0.426859	0.458362	0.535131	0.55465	20.41%	-7.33%	-3.95%	16.75%
45	0.681575	0.57227	0.610697	0.706521	0.73226	19.1%	-6.92%	-3.53%	15.69%
50	0.960886	0.816924	0.866376	0.992312	1.02824	17.62%	-6.55%	-3.17%	14.54%
55	1.51828	1.30921	1.37986	1.56318	1.6193	15.97%	-6.24%	-2.87%	13.29%
60	3.18504	2.79051	2.92271	3.27197	3.38832	14.14%	-6.0%	-2.66%	11.95%
65	16.8503	15.022	15.6385	17.2864	17.8937	12.17%	-5.83%	-2.52%	10.54%

F	AVÖ05R	AVÖ96R	DAV 1994R	DAV 2004R	ERM 1999	AVÖ05/AVÖ96	AVÖ05/ERM99	AVÖ05/DAV04	DAV04/DAV94
25	0.283399	0.255437	0.269759	0.301867	0.294119	10.95%	-3.64%	-6.12%	11.9%
30	0.347261	0.313431	0.330337	0.368055	0.360337	10.79%	-3.63%	-5.65%	11.42%
35	0.433317	0.391997	0.412209	0.457152	0.449666	10.54%	-3.64%	-5.21%	10.9%
40	0.5547	0.50346	0.528092	0.582766	0.575821	10.18%	-3.67%	-4.82%	10.35%
45	0.737594	0.672426	0.703376	0.772068	0.766171	9.69%	-3.73%	-4.47%	9.77%
50	1.04298	0.956236	0.997236	1.08837	1.08448	9.07%	-3.83%	-4.17%	9.14%
55	1.6536	1.5268	1.5871	1.72143	1.72189	8.3%	-3.97%	-3.94%	8.46%
60	3.48272	3.24341	3.35972	3.61969	3.6338	7.38%	-4.16%	-3.78%	7.74%
65	18.5128	17.4169	17.9751	19.2246	19.3658	6.29%	-4.4%	-3.7%	6.95%

# Prämien von Renten mit Garantzeit

Garantiezeit: 20 Jahre, Bezug ab 65 Jahren, 2.75% Zins, Rückgewähr während Aufschubzeit

## Männer:

Alter	Gen.	Bezug	AVÖ 2005R	AVÖ 1996R	DAV 2004	ERM99	Diff.'96->'05
65	1940	65	18543.4	17498.1	18917.2	19386.4	5.97%
55	1950	65	1631.66	1506.98	1672.08	1717.6	8.27%
45	1960	65	719.981	651.712	742.949	764.719	10.48%
35	1970	65	419.94	373.425	437.278	450.6	12.46%
25	1980	65	273.432	239.602	287.82	296.445	14.12%

## Frauen:

Alter	Gen.	Bezug	AVÖ 2005R	AVÖ 1996R	DAV 2004	ERM99	Diff.'96->'05
65	1940	65	19484.7	18716.9	20176.6	20081.5	4.1%
55	1950	65	1716.91	1625.43	1784.41	1767.09	5.63%
45	1960	65	758.525	710.09	792.981	780.502	6.82%
35	1970	65	442.608	411.051	466.34	455.676	7.68%
25	1980	65	288.089	266.219	306.377	296.936	8.21%

# Änderungen zu AVÖ 1996R, Sicherheitszuschläge

In AVÖ 2005R eingebaute (oder im Vergleich zu DAV 2004-R nicht eingebaute) Effekte und Sicherheitszu- bzw. abschläge im Vergleich zur AVÖ 1996R:

Effekt	2. Ord. (tats.)	1. Ord. (Sich.)
Keine kurzfrist. <b>Trendabschwächung</b>	+	
<b>Selektionsfaktoren</b> korrigiert	+	
Höhere <b>Selektion für F</b>	(+)	+
Kein Sicherheitsabschlag auf Selektion <sup>a</sup>		-
0.2% <b>Selektionsaufschlag auf Trend</b> <sup>b</sup>	+	
0.3% <b>Sicherheitszuschlag auf Trend</b>		+
Verschiebung des Buckels bei <b>hohen Altern</b>	+	+
Monotonisierung des Trends		(+) <sup>c</sup>

<sup>a</sup>DAV 2004-R hat zusätzlichen Sicherheitsabschlag von 7% auf Wahrscheinlichkeiten

<sup>b</sup>Nur soziale Selektion, keine persönliche Selektion miteinbezogen.

<sup>c</sup>Praktisch wenig Einfluss, da fast nur in Aufschubzeit.

# Einfluss der 1. und 2. Ordnung

Prämie einer aufgeschobenen Leibrente mit Rückgewähr während Aufschubzeit. 2.75% Zins.

## Männer:

Alter	Gen.	Bezug	AVÖ 2005R	'05, 2.Ord.	AVÖ 1996R	Diff.'96->2.O.	Diff. '96->'05
65	1940	65	16850.3	16380.9	15022.	9.05%	12.17%
55	1950	65	1518.28	1459.46	1309.21	11.48%	15.97%
45	1960	65	681.575	649.248	572.27	13.45%	19.1%
35	1970	65	402.509	380.617	331.166	14.93%	21.54%
25	1980	65	264.451	248.624	214.44	15.94%	23.32%

## Frauen:

Alter	Gen.	Bezug	AVÖ 2005R	'05, 2.Ord.	AVÖ 1996R	Diff.'96->2.O.	Diff. '96->'05
65	1940	65	18512.8	17857.3	17416.9	2.53%	6.29%
55	1950	65	1653.6	1583.4	1526.8	3.71%	8.3%
45	1960	65	737.594	702.092	672.426	4.41%	9.69%
35	1970	65	433.317	410.449	391.997	4.71%	10.54%
25	1980	65	283.399	267.378	255.437	4.67%	10.95%

# Diverses

- Einfluss der Trendabschwächung nur maximal 1-2% auf die Barwerte (im relev. Zeitbereich).
- Barwerte / Prämien in Gruppentafel etwa 2-3.5% niedriger als in Einzeltafel für Männer und etwa 1-2.5% niedriger für Frauen.
- In D festgestellt:
  - Sehr starker Einfluss eines **Gesundheitschecks** auf die Sterblichkeit
  - Einfluss der **Rentenhöhe** auf die Sterblichkeit
- Barwerte für **hohe Alter** sind gesunken, weil  $q$  in den Volkssterbetafeln gesunken ist. BW bei hohen Altern liegen teilweise 30% unter den Barwerten nach DAV 2004-R. Zu geringe  $q$  in deutscher Tafeln für hohe Alter!
- **Keine allzu vorsichtigen Annahmen** in die Tafel eingebaut (um möglichst viel Sicherheit und lange Lebensdauer der Tafel zu gewährleisten). Gründe dafür:
  - Sicherheitszuschläge der DAV 2004-R sind noch höher, Werte in D und CH deutlich über unseren
  - Momentan noch **geringe Bestände**. In 10 Jahren wäre der Nachreservierungs-Bedarf sonst um ein Vielfaches höher.
  - Falls Annahmen wider Erwarten zu stark waren, kann über die **Gewinnbeteiligung** ein Teil wieder rückerstattet werden.

# Gewinnbeteiligung in einem Markov-Modell

---

Beispielrechnung der Auswirkung des Umstiegs auf die AVÖ 2005-R in der Gewinnbeteiligung.

Gemeinsame Arbeit mit Thomas Bauer und Uwe Schmock

# Das Markov-Modell in der Lebensversicherung

- **Zustand**  $Z \in \mathcal{S}$  der Polizzae als **Markovkette** modelliert (künftige Entwicklung hängt nur von aktuellem Zustand ab, nicht von Vergangenheit; „Markov-Eigenschaft“):

$$\mathbb{P}[Z(u) = k | Z(t_1) = j_1, \dots, Z(t_n) = j_n, Z(t) = j] = \mathbb{P}[Z(u) = k | Z(t) = j]$$

- Übergänge beschrieben durch **Übergangswahrscheinlichkeiten**  $P(t, u)$  bzw. **-intensitäten**  $\Lambda(t)$ :

$$P^Z(t, u) = \begin{pmatrix} p_{11}^Z(t, u) & p_{12}^Z(t, u) & \dots \\ p_{21}^Z(t, u) & p_{22}^Z(t, u) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \Lambda(t) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(t) & \mu_{12}(t) & \dots \\ \mu_{21}(t) & \mu_{22}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei  $\mu_{jk}(t) = \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{p_{jk}^Z(t, t + \Delta t)}{\Delta t}$  für alle  $j \neq k \in \mathcal{S}, t \in [0, \infty)$ .

# Markov-Modell II

- Zusammenhang durch **Kolmogorovsche Differentialgleichungen**:

$$\frac{\partial}{\partial t} P^Z(s, t) = P^Z(s, t) \Lambda(t) \text{ (Vorw.-Glg.)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial s} P^Z(s, t) = \Lambda(s) P^Z(s, t) \text{ (Rückw.-Glg.)}$$

- Größen wie Deckungskapital durch **Rekursionsgleichungen** bzw. **Differentialgleichungen** (Thielesche Differenzen-/Differentialgleichungen) gegeben für  $s < t < u$ :

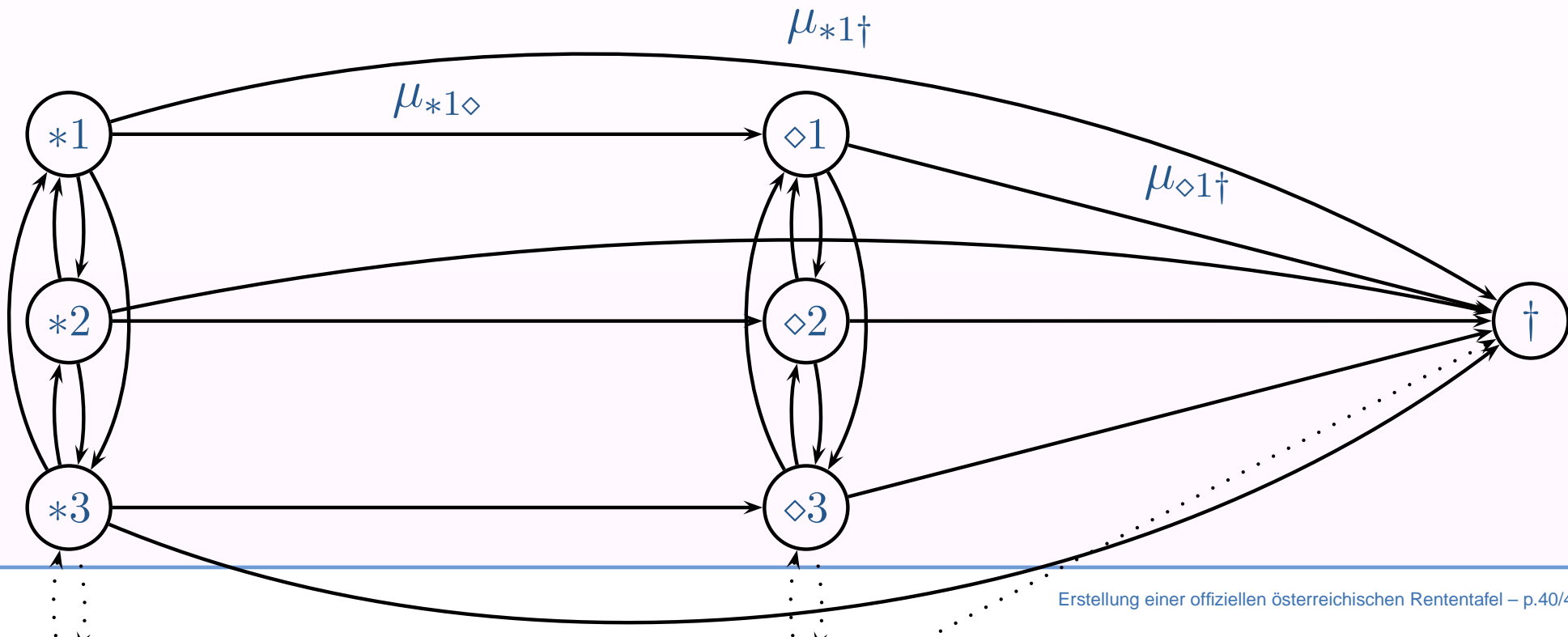
$$W_j^+(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}} p_{jg}(t, u) W_g^+(u) + \int_{]t, u]} v(\tau) \sum_{g \in \mathcal{S}} p_{jg}(t, \tau) \left\{ \underbrace{da_g(\tau)}_{\text{für Zustand } g} + \sum_{h \in \mathcal{S}, h \neq g} \underbrace{a_{gh}(\tau)}_{\text{bei Zustandswechsel}} \mu_{gh}(\tau) d\tau \right\}$$

(bei determin. Zins, ansonsten Verallgemeinerung möglich)

# Einfaches Rentenvers.-Modell mit stoch. Zins

Bestimmung der **Prämien** erfolgt nach (vorsichtigen) **Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung**. Die **Auszahlungen** geschehen jedoch nach der **wahren Sterblichkeit und dem wahren Zins (2. Ordnung)**, die i.A. von RG 1. Ordnung verschieden und hier als stochastisch angenommen sind:

- zwei tatsächliche Zinszustände (2.Ord.): z.B. 2.5% und 2.75%, als Markovprozess
- zwei tatsächliche Sterblichkeitszustände (2. Ord), als Markovprozess



# Arten der Gewinnbeteiligung

Durch Verwendung der RG 1. Ordnung bei Prämienbestimmung ergibt sich ein **Gewinn für die Versicherung**  $\Rightarrow$  muss an Versicherte ausgeschüttet werden.

- **Cash-Bonus**: Sofortige Auszahlung der Dividenden
- **Terminal-Bonus**: Auszahlung der akkumulierten Dividenden am Ende der Laufzeit
- **Erhöhte Versicherungsleistung**: Dividenden werden benutzt, um Versicherungsschutz zu erhöhen

Für jede dieser Typen der Gewinnbeteiligung lässt sich eine Thiele'sche DG aufstellen und numerisch lösen. Betrachtet werden diverse Szenarien (Werte für die zwei Zins- und Sterblichkeitsniveaus). Untersucht wird Zins- und Sterblichkeitsgewinn, sowie der Gesamtgewinn.

Literatur:

- Th. Bauer: Gewinnverteilungssysteme in einem stochastischen Lebensversicherungsmodell, Diplomarbeit, TU Wien, 2005.
- R. Norberg: A theory of bonus in life insurance. Finance Stochast., 3:373–390, 1999.

# Numerische Ergebnisse

- Sterblichkeitsintensitäten durch Spline-Interpolation aus AVÖ 2005R.

**Sterblichkeitsgewinn** in 2 Szenarien, für erhöhte Versicherungsleistungen:

Rententafel AVÖ 1996R:

Szenario	$W_{ac,l}$	$W_{ad,l}$	$W_{bc,l}$	$W_{bd,l}$
5a	0.259294	0.242199	0.266465	0.248513
6a	1.5966	1.5224	1.60247	1.52777

Rententafel AVÖ 2005R:

Szenario	$W_{ac,l}$	$W_{ad,l}$	$W_{bc,l}$	$W_{bd,l}$
5a	0.233388	0.219775	0.239851	0.225547
6a	1.50657	1.44527	1.51212	1.4504

Verhalten aller drei Typen bei allen Szenarios ähnlich:

- **Sterblichkeitsgew. sinkt** bei Übergang zu AVÖ 2005R, **Gesamtgew. steigt!**
- Gesamtgewinn oft um eine Größenordnung höher als Sterblichkeitsgewinn  
⇒ **Zinsniveau wichtiger** als Sterblichkeit

# Einfluss von Sterblichkeit und Zinsraten

- **Höchstrechnungszins** von Finanzmarktaufsicht (FMA) von 2.75% auf 2.25% gesenkt, gleichzeitig mit verpflichtender **Einführung der AVÖ 2005R**.
- Frage: Wirkt sich Zinsschwankung oder Sterblichkeitsschwankung stärker auf den Gewinn aus?
- **Vergleichsrechnung** mit Cash-Bonus:

$\epsilon_\mu \setminus e^\delta - 1$	2%	2.25%	2.5%	2.75%	3%
0	0.	0.439677	0.862117	1.26816	1.65858
0.5	0.168832	0.599408	1.0133	1.41129	1.79416
1	0.326785	0.748986	1.155	1.54559	1.92148

Abhängigkeit des Gesamtgewinnes bei Cash-Bonus von Zins- und Sterbeintensität in einem deterministischen Modell ( $\delta_a = \delta_b = \delta$  und  $\mu_a = \mu_b$ ). Einfluss des **Zinsniveaus ist beträchtlich höher** als der der Sterblichkeit.

---

---

**Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit!**