

Quasi-Monte Carlo Methoden

Am Schnittpunkt von numerischer Analysis, Zahlentheorie und Finanzmathematik

Reinhold Kainhofer

FG "Finanz- und Versicherungsmathematik"
Institut für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Wien

Vortragsreihe "Wissenswertes aus der Mathematik"

20. Juni 2005

Übersicht

- 1 **Quasi-Monte Carlo Methoden zur numerischen Integration**
 - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
 - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
 - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
- 2 Anwendungsgebiete von QMC Methoden
 - Kollektives Risikomodell in der Versicherungsmathematik
 - Rasch oszillierende retardierte Differentialgleichungen
 - Bewertung von Kontrakten
- 3 Probleme bei Standard-QMC...
 - Andere Verteilungen als $U(0,1)$, Inversion und "Importance Sampling"
 - Funktionen mit unbeschränkter Variation (Singularität, Knick, ...)
 - Hyperbolische Distanz der Folgen zu den Ecken
 - Optionen: Knicke verursachen unbeschränkte Variation
 - Wann funktioniert QMC gut: die effektive Dimension eines Problems

Numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten w_k .

Benötigte Zahl an Stützstellen: $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung: $\mathcal{O}(m^{-1}) \equiv \mathcal{O}(N^{-2/s})$ (Curse of dimensionality)

\implies Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit $s!$

- Idee: Einheitsintervall $[0, 1]^s$ wird von Stützstellen gut ausgefüllt

Numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten w_k .

Benötigte Zahl an Stützstellen: $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung: $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$ (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit s !

- Idee: Einheitsintervall $[0, 1]^s$ wird von Stützstellen gut ausgefüllt

Numerische Integration und "Curse of dimensionality"

Ziel: Numerische Lösung mittel-dimensionale (5-400 Dimensionen) Integrationsprobleme

- Klassische Trapezregel, herkömmliche numerische Verfahren:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \sum_{n_1=0}^m \cdots \sum_{n_s=0}^m w_{n_1} \cdots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

mit geeigneten Gewichten w_k .

Benötigte Zahl an Stützstellen: $N = (m + 1)^s$

Fehlerordnung: $\mathcal{O}(m^{-1}) = \mathcal{O}(N^{-2/s})$ (Curse of dimensionality)

⇒ Zahl der Stützstellen steigt exponentiell mit $s!$

- Idee: Einheitsintervall $[0, 1]^s$ wird von Stützstellen gut ausgefüllt

Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über N zufällig gewählte Stützstellen $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$ in $U^s = [0, 1]^s$:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

- (1) gilt für quadratisch integrierbare f (d.h. $\sigma(f)$ existiert)
- Fehlerordnung: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ (unabh. von $s!$)
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
 - Benutze Glg. (1) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
 - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
 - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über N zufällig gewählte Stützstellen $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$ in $U^s = [0, 1]^s$:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

- (1) gilt für quadratisch integrierbare f (d.h. $\sigma(f)$ existiert)
- Fehlerordnung: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ (unabh. von $s!$)
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
 - Benutze Glg. (1) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
 - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
 - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

Zufallszahlen (MC) und determinist. Folgen (QMC)

- **Monte Carlo (MC)** Methoden: Integral entspricht EW über N zufällig gewählte Stützstellen $(\mathbf{x}_n)_{n=0, \dots, N-1}$ in $U^s = [0, 1]^s$:

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (1)$$

- (1) gilt für quadratisch integrierbare f (d.h. $\sigma(f)$ existiert)
- Fehlerordnung: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ (unabh. von $s!$)
- Fehlerabschätzung ist nur stochastisch (d.h. Konfidenzintervall, keine Schranke!)
- **Quasi-Monte Carlo (QMC)** Methoden: Bei MC gute Verteilungseigenschaften, nicht Zufälligkeit relevant!
 - Benutze Glg. (1) mit **deterministisch konstruierten Folgen**, die möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.
 - Maß für Gleichverteilung ist die **Diskrepanz**
 - deterministische Fehlerabschätzung durch **Koksma-Hlawka Ungleichung**

Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

(Stern-) Diskrepanz $D_N^*(S)$ einer Folge $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$ definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen $[0, \mathbf{a})$:

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (2)$$

mit $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$... Zahl der Punkte in J und $\lambda_s(J)$ das Lebesgue-Maß von J .

Theorem (Koksma-Hlawka Ungl., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ auf U^s im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (3)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit f und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerschätzung)

Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

(Stern-) Diskrepanz $D_N^*(S)$ einer Folge $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$ definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen $[0, \mathbf{a})$:

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (2)$$

mit $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$... Zahl der Punkte in J und $\lambda_s(J)$ das Lebesgue-Maß von J .

Theorem (Koksma-Hlawka Ungl., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ auf U^s im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (3)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit f und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerschätzung)

Diskrepanz als Maß für Gleichverteilung und Koksma-Hlawka Ungl.

(Stern-) Diskrepanz $D_N^*(S)$ einer Folge $S = (\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < N}$ definiert als maximaler Fehler auf allen Intervallen $[0, \mathbf{a})$:

$$D_N^*(S) = \sup_{J=[0, \mathbf{a}) \subseteq U^s} \left| \frac{A(J, S)}{N} - \lambda_s(J) \right| \quad (2)$$

mit $A(J, S) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_J(\mathbf{x}_n)$... Zahl der Punkte in J und $\lambda_s(J)$ das Lebesgue-Maß von J .

Theorem (Koksma-Hlawka Ungl., Fehlerschranke von QMC Integration)

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ auf U^s im Sinne von Hardy und Krause, dann gilt für alle $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in U^s$, dass

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_n) - \int_{U^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right| \leq V(f) \cdot D_N^*(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}). \quad (3)$$

- Fehler faktorisiert in Term mit f und Term mit Eigenschaft der Folge!
- Sehr pessimistische **deterministische** Fehlerschranke (für Konvergenzbeweis, nicht für Fehlerschätzung)

Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Konstruktion von deterministischen Folgen mit möglichst kleiner Diskrepanz (= gute Gleichverteilungseigenschaften)

Folgen kleiner Diskrepanz

Die besten bekannten Folgen, genannt **Folgen kleiner Diskrepanz**, haben eine Diskrepanz der Ordnung (vermutlich bestmöglich) (mit C_s nur von Folge und Dim. abhängig \Rightarrow Tractability):

$$D_N^*(S) \leq C_s \frac{(\log N)^s}{N} \quad (4)$$

Beispiele von Folgen kleiner Diskrepanz

- **$\lfloor n\alpha \rfloor$ -Folge:** $(\lfloor n\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ und geeignetem Vektor α_i von unabhängigen Irrationalzahlen (Weyl'sches Kriterium).
Für $s \geq 2$ kein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}^s$ bekannt...

Folgen kleiner Diskrepanz II

- Halton-Folge in paarw. rel. primen Basen $\{p_1, \dots, p_s\}$:

$$\mathbf{x}_n^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^{-k-1}, \quad \text{mit } n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{(i)} p_i^k$$

d.h. Spiegelung der Darstellung von n in Basis p_i (Koeffizienten $n_k^{(i)}$) am Komma (komponenten-weise).

- Folge in Basis 2: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \dots\right)$
- x_{15} in Basen (2, 3, 5): $15 = 1111_2 = 120_3 = 30_5$.

$$\begin{aligned} x_{15}^{(1)} &= 0.1111_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{15}{16} \\ x_{15}^{(2)} &= 0.021_3 = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} = \frac{7}{27} \\ x_{15}^{(3)} &= 0.03_5 = 0 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

- Sobol-Folge, Faure-Folge: digitale Netze/Folgen

Folgen kleiner Diskrepanz III

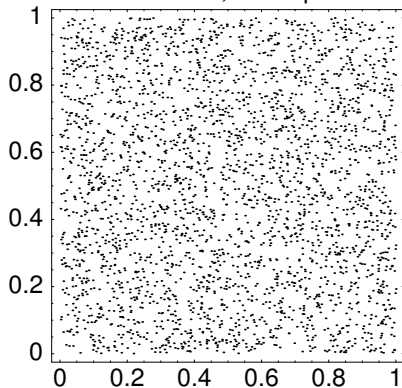
- (t, m, s) -Netze, (t, s) -Folgen in Basis b :
Elementarintervalle $J = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i})$ mit Ganzzahlen
 $d_i \geq 0, 0 \leq a_i < b^{d_i}$

(t, m, s) -**Netz**: Punktmenge von b^m Zahlen, sodass jedes
Elementarintervall J mit $\lambda_s(J) = b^{t-m}$ genau b^t Punkte enthält

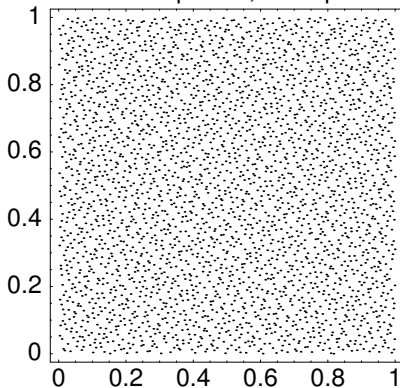
(t, s) -**Folge**: Teilmenge von b^m aufeinanderfolgenden Elementen ist
 (t, m, s) -Netz

Verallgemeinerung der Sobol-/Faure-Folgen.
Konstruktion z.B. nach Niederreiter, Xing, etc.

Monte Carlo, 3000 points



Halton sequence, 3000 points



- Bessere Verteilungseigenschaften
- Korrelationen zwischen den einzelnen Elementen

Übersicht

- 1 Quasi-Monte Carlo Methoden zur numerischen Integration
 - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
 - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
 - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
- 2 **Anwendungsgebiete von QMC Methoden**
 - **Kollektives Risikomodell in der Versicherungsmathematik**
 - **Rasch oszillierende retardierte Differentialgleichungen**
 - **Bewertung von Kontrakten**
- 3 Probleme bei Standard-QMC...
 - Andere Verteilungen als $U(0,1)$, Inversion und "Importance Sampling"
 - Funktionen mit unbeschränkter Variation (Singularität, Knick, ...)
 - Hyperbolische Distanz der Folgen zu den Ecken
 - Optionen: Knicke verursachen unbeschränkte Variation
 - Wann funktioniert QMC gut: die effektive Dimension eines Problems

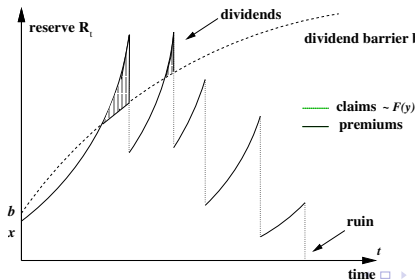
Kollektives Risikomodell in der Sachversicherung, Dividendenbarriere I

- Verallg. Cramer-Lundbergmodell mit Zins, sublin. Dividendenschranke
- #Schäden $N_t \sim \text{Poiss}(\lambda)$, Schadenshöhen $X_n \sim^{iid} F$ (Comp. Poisson)
- Arbeiten gemeinsam mit H. Albrecher (2001)

Risikoprozess (mit oberer Schranke b_t , Kapital darüber als Dividenden):

$$dR_t = (c + iR_t)dt - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t < b_t$$

$$dR_t = db_t - X_{N_t}dN_t \quad \text{für } R_t = b_t$$



Kollektives Risikomodell in der Sachversicherung, Dividendenbarriere II

Lösung z.B. durch direkte Pfadsimulation möglich.

Integro-Differential-Gleichung für BW $W(u, b)$ der Dividenden:

$$(c + iu) \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial W}{\partial b} - (i + \lambda)W + \lambda \int_0^u W(u - z, b) dF(z) = 0, \quad \text{mit RB } \left. \frac{\partial W}{\partial u} \right|_{u=b} = 1$$

Äquivalent existiert ein kontrahierender Integraloperator $A \Rightarrow$ Fixpunktsatz!

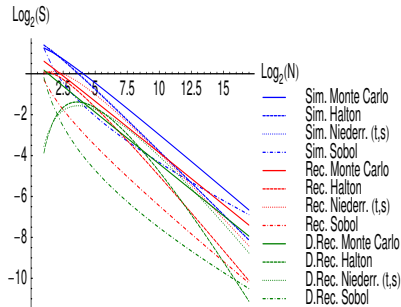
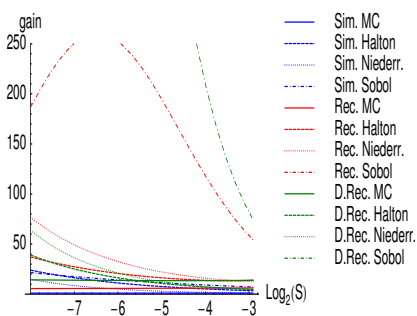
Lösung durch Fixpunktiteration

$$g^{(k)}(u, b) = A^k g^{(0)}(u, b)$$

$$g^{(0)}(u, b) = h(u, b) := \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-is} \left((c + iu) e^{is} - \text{Barr}'(b, s) \right) ds dt$$

Kollektives Risikomodell in der Sachversicherung, Dividendenbarriere III

- QMC auf diesen k -fach iterierten Operator angewendet \Rightarrow $2k$ -dimensionales Integrationsproblem
- QMC hat geringeren Aufwand für selben Fehler als Monte Carlo oder Pfadsimulation

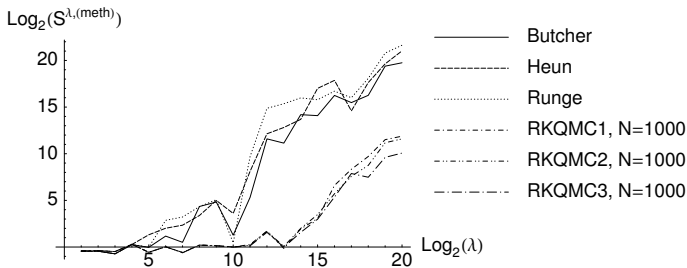


QMC für stark oszillierende retardierte DG (K., 2002)

Stark oszillierende DG oder DG mit stark oszillierender Lösung (Param. λ):

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_k(t))), \text{ für } t \geq t_0, k \geq 1,$$
$$y(t) = \phi(t), \text{ for } t \leq t_0,$$

Runge-Kutta-ähnliches Verfahren (nicht 1 Punkt in jedem Schritt, sondern Integral über das ganze Intervall, um die Oszillationen rauszumitteln):



QMC methoden bleiben noch stabil, wo herkömmliche Methoden versagen.

Bewertung Asiatischer (pfadabhängiger) Optionen

- Payoff: Arithmetisches Mittel über mehrere Zeitpunkte bis Maturity

$$P(S_T) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} - K \right)^+$$

mit $(S_t)_{t \geq 0}$... Preisprozess, K ... Ausübungspreis

- $S_t = e^{X_t}$ mit Lévy-Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, (Inkrementen $h_i = X_i - X_{i-1} \sim H$, z.B. NIG, Variance-Gamma, Hyperbolic, ...)

Bewertung mittels Fundamentalsatz (Delbaen / Schachermayer)

$$V_t := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [P(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

mit äquivalentem Martingalmaß Q (z.B. Esscher-Maß in diesem Fall)

- n -dimensionales Integrationsproblem
- Pfad mit Verteilung nach Maß Q muss simuliert werden / Integral bzgl. Maß $Q \Rightarrow$ keine Gleichverteilung
- Typischerweise unbeschränkter Support \Rightarrow Transformation auf kompaktes Intervall (z.B. $[0, 1]^S$) nötig

Bewertung Asiatischer (pfadabhängiger) Optionen

- Payoff: Arithmetisches Mittel über mehrere Zeitpunkte bis Maturity

$$P(S_T) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} - K \right)^+$$

mit $(S_t)_{t \geq 0}$... Preisprozess, K ... Ausübungspreis

- $S_t = e^{X_t}$ mit Lévy-Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, (Inkrement $h_i = X_i - X_{i-1} \sim H$, z.B. NIG, Variance-Gamma, Hyperbolic, ...)

Bewertung mittels Fundamentalsatz (Delbaen / Schachermayer)

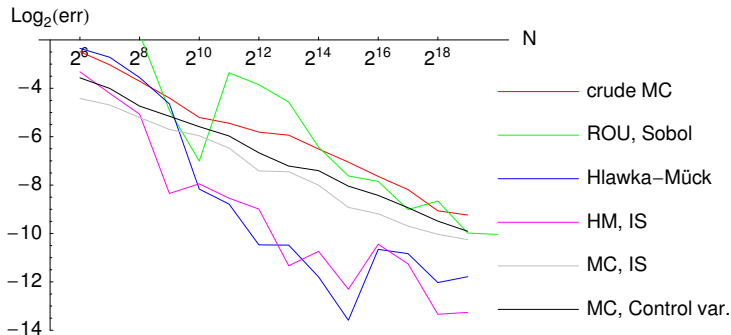
$$V_t := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q [P(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

mit äquivalentem Martingalmaß Q (z.B. Esscher-Maß in diesem Fall)

- n -dimensionales Integrationsproblem
- Pfad mit Verteilung nach Maß Q muss simuliert werden / Integral bzgl. Maß $Q \Rightarrow$ keine Gleichverteilung
- Typischerweise unbeschränkter Support \Rightarrow Transformation auf kompaktes Intervall (z.B. $[0, 1]^S$) nötig

Ergebnisse: MC im Vergleich mit QMC (Hartinger, K., Predota, 2003)

- konstanter Zins r (zur Vereinfachung), 12 Dimensionen, NIG Verteilung
- Methode von Hlawka-Mück zur Erzeugung von nicht-gleichverteilten Folgen kleiner Diskrepanz



Übersicht

- 1 Quasi-Monte Carlo Methoden zur numerischen Integration
 - Von Zufallszahlen (MC) zu deterministischen Folgen (QMC)
 - Fehlerabschätzung: Diskrepanz und Koksma-Hlawka Ungl.
 - Folgen kleiner Diskrepanz: Halton, Sobol, Faure, (t,s)-Netze
- 2 Anwendungsgebiete von QMC Methoden
 - Kollektives Risikomodell in der Versicherungsmathematik
 - Rasch oszillierende retardierte Differentialgleichungen
 - Bewertung von Kontrakten
- 3 **Probleme bei Standard-QMC...**
 - **Andere Verteilungen als $U(0,1)$, Inversion und "Importance Sampling"**
 - **Funktionen mit unbeschränkter Variation (Singularität, Knick, ...)**
 - **Hyperbolische Distanz der Folgen zu den Ecken**
 - **Optionen: Knicke verursachen unbeschränkte Variation**
 - **Wann funktioniert QMC gut: die effektive Dimension eines Problems**

Erzeugung von H -verteilten Folgen kleiner Diskrepanz

- **Inversion**: Quantilfunktion oft nicht explizit bekannt;
Gittereigenschaft bei (bedingter) Inversion nicht erhalten.
- **Acceptance-Rejection**: Für QMC nicht brauchbar, da Korellationen
vorhanden, und Sprungfunktionen implizit eingeführt

Hlawka-Mück Methode (Inversion mit quasi-empirischer bed. Verteilung)

Sei $M_h = \sup h(\mathbf{x})$. Dann hat die Folge $\tilde{\omega}$ mit

$$\tilde{y}_{k,j} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N [1 + \mathbf{x}_{k,j} - H_j(\mathbf{x}_{r,j})] = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \chi_{[0, \mathbf{x}_{k,j}]}(H_j(\mathbf{x}_{r,j}))$$

eine H -Diskrepanz $D_{N,H}(\tilde{\omega}) \leq (1 + 3sM_h)D_N(\omega)$.

H -Diskrepanz der Folge $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$D_{h,N}((\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sup_{J=[0, \mathbf{z}] \subset [0,1]^s} \left| \frac{\#(\mathbf{x}_i, J)}{N} - H(J) \right|$$

Verbesserung der Eigenschaften durch Interpolation der quasi-emp. bed.
Verteilung (Hartinger, K., 2005)

Erzeugung von H -verteilten Folgen kleiner Diskrepanz

- **Inversion**: Quantilfunktion oft nicht explizit bekannt;
Gittereigenschaft bei (bedingter) Inversion nicht erhalten.
- **Acceptance-Rejection**: Für QMC nicht brauchbar, da Korrelationen vorhanden, und Sprungfunktionen implizit eingeführt

Hlawka-Mück Methode (Inversion mit quasi-empirischer bed. Verteilung)

Sei $M_h = \sup h(\mathbf{x})$. Dann hat die Folge $\tilde{\omega}$ mit

$$\tilde{y}_{k,j} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N [1 + \mathbf{x}_{k,j} - H_j(\mathbf{x}_{r,j})] = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \chi_{[0, \mathbf{x}_{k,j}]}(H_j(\mathbf{x}_{r,j}))$$

eine H -Diskrepanz $D_{N,H}(\tilde{\omega}) \leq (1 + 3sM_h)D_N(\omega)$.

H -Diskrepanz der Folge $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$D_{h,N}((\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sup_{J=[0, \mathbf{z}] \subset [0,1]^s} \left| \frac{\#(\mathbf{x}_i, J)}{N} - H(J) \right|$$

Verbesserung der Eigenschaften durch Interpolation der quasi-emp. bed. Verteilung (Hartinger, K., 2005)

Unbeschränkter Support und unbeschränkte Funktionen

- Beispiel: Erwartungswert einer Exp -verteilten ZV (unbeschränkter Integrationsbereich \rightarrow Transformation auf $[0, 1]$ durch Inversion):

$$\mu = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^1 \frac{\log y}{\lambda} dy \left(= \frac{1}{\lambda} \right)$$

Problem: $\log y$ unbeschränkt auf $[0, 1]$, damit nicht von beschr. Variation

- Tritt sehr oft bei Inversion oder Importance Sampling auf!

Theorem (Owen (2006); Hartinger, K. (2005) für allg. Verteilungen H)

Sei f eine Funktion auf U^s mit $|\partial^u f| \leq B \prod_{i=1}^s x_i^{-A_i - x_{u(i)}}$ mit $A_i > 0$, für alle $u \subseteq \{1, \dots, s\}$. Die Folge $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n}$ erfülle

$$\prod_{i=1}^s x_{n,i} \geq c N^{-r} \quad (\text{"Origin-avoidance"}). \quad (5)$$

Dann ist

$$\left| \int_{U^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{N} \sum f(\mathbf{x}_n) \right| \leq C_1 D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) N^{\eta + r \max_i A_i} + C_2 N^{r(\max_i A_i - 1)}$$

Ähnliches Theorem für Singularitäten in anderen Ecken als Ursprung.

Unbeschränkter Support und unbeschränkte Funktionen

- Beispiel: Erwartungswert einer Exp -verteilten ZV (unbeschränkter Integrationsbereich \rightarrow Transformation auf $[0, 1]$ durch Inversion):

$$\mu = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^1 \frac{\log y}{\lambda} dy \left(= \frac{1}{\lambda} \right)$$

Problem: $\log y$ unbeschränkt auf $[0, 1]$, damit nicht von beschr. Variation

- Tritt sehr oft bei Inversion oder Importance Sampling auf!

Theorem (Owen (2006); Hartinger, K. (2005) für allg. Verteilungen H)

Sei f eine Funktion auf U^s mit $|\partial^u f| \leq B \prod_{i=1}^s x_i^{-A_i - \chi_{u(i)}}$ mit $A_i > 0$, für alle $u \subseteq \{1, \dots, s\}$. Die Folge $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n}$ erfülle

$$\prod_{i=1}^s x_{n,i} \geq cN^{-r} \quad (\text{"Origin-avoidance"}). \quad (5)$$

Dann ist

$$\left| \int_{U^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{N} \sum f(\mathbf{x}_n) \right| \leq C_1 D_N^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) N^{\eta + r \max_i A_i} + C_2 N^{r(\max_i A_i - 1)}$$

Ähnliches Theorem für Singularitäten in anderen Ecken als Ursprung.

Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Folgen mit kleinem r in (5) gesucht (besten hyperbolischen Abstand zum Ursprung / zu den Ecken von $[0, 1]^s$)

Hyperbolische Distanz zum Ursprung / zu gemischten Ecken

Mit welcher Ordnung tendiert $\prod x_{n,i}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0?

Mit welcher Ordnung tendiert $\prod |h_i - x_{n,i}|$ gegen Ecke $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$?

Hyperbolische Distanz zum Ursprung:

- $r \geq 1$ klar für Halton Folge, (t, s) -Netze (aufgrund Konstruktion).
- Sobol (1973): Sobol Folge erfüllt (5) mit $r = 1$ für Ursprung.
- Owen (2006): Halton Folge erfüllt (5) mit $r = 1$ für Ursprung.
- Hartinger, K., Ziegler (2005): Alle verallgemeinerten Niederreiter Folgen (Sobol, Faure, (t, s) -Folgen, ...) erfüllen (5) mit $r = 1$ für Ursprung. (Beweis über formale Laurant-Reihen über Polynomkörper \mathbb{F}_b)

Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz I

Ziel: Folgen mit kleinem r in (5) gesucht (besten hyperbolischen Abstand zum Ursprung / zu den Ecken von $[0, 1]^s$)

Hyperbolische Distanz zum Ursprung / zu gemischten Ecken

Mit welcher Ordnung tendiert $\prod x_{n,i}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0?

Mit welcher Ordnung tendiert $\prod |h_i - x_{n,i}|$ gegen Ecke $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$?

Hyperbolische Distanz zum Ursprung:

- $r \geq 1$ klar für Halton Folge, (t, s) -Netze (aufgrund Konstruktion).
- Sobol (1973): **Sobol Folge** erfüllt (5) mit $r = 1$ für Ursprung.
- Owen (2006): **Halton Folge** erfüllt (5) mit $r = 1$ für Ursprung.
- Hartinger, K., Ziegler (2005): Alle **verallgemeinerten Niederreiter Folgen** (Sobol, Faure, (t, s) -Folgen, ...) erfüllen (5) mit $r = 1$ für Ursprung. (Beweis über formale Laurant-Reihen über Polynomkörper \mathbb{F}_b)

Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz II

Hyperbolische Distanz zu **anderen Ecken** $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ (Hartinger, K., Ziegler (2005)):

- Für die **Halton-Folge** gilt eine hyperbolische Distanz von **mindestens** $\mathcal{O}(1/(N \log N))$ für gemischte Ecken (Beweis über Euler-Theorem).
- Für die **Halton-Folge** gilt $r \leq 1 + \varepsilon$ für gemischte Ecken (Beweis durch Betrachtung der Ziffernentwicklung aufgrund Konstruktion der Halton-Folge durch Spiegelung am Komma \Rightarrow Diophantische Gleichung

$$1 = C \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} - D \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}$$

mit Unbekannten $C, D, \beta_k, \alpha_j \in \mathbb{N}$. Zeige $r \leq N^{1+\varepsilon}$ für spezielle N , die Ungl. nicht erfüllen. Schmidt's Subspace Theorem \Rightarrow nur endliche viele andere $N \Rightarrow$ asymptotisch irrelevant)

- Für die **Faure Folge** existieren Teilfolgen mit $r \geq 2$ für gemischte Ecken und $r \geq \frac{3}{2}$ für $\mathbf{h} = \mathbf{1}$.

Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz II

Hyperbolische Distanz zu **anderen Ecken** $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ (Hartinger, K., Ziegler (2005)):

- Für die **Halton-Folge** gilt eine hyperbolische Distanz von **mindestens** $\mathcal{O}(1/(N \log N))$ für gemischte Ecken (Beweis über Euler-Theorem).
- Für die **Halton-Folge** gilt $r \leq 1 + \varepsilon$ für gemischte Ecken (Beweis durch Betrachtung der Ziffernentwicklung aufgrund Konstruktion der Halton-Folge durch Spiegelung am Komma \Rightarrow Diophantische Gleichung

$$1 = c \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} - D \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}$$

mit Unbekannten $C, D, \beta_k, \alpha_j \in \mathbb{N}$. Zeige $r \leq N^{1+\varepsilon}$ für spezielle N , die Ungl. nicht erfüllen. Schmidt's Subspace Theorem \Rightarrow nur endliche viele andere $N \Rightarrow$ asymptotisch irrelevant)

- Für die **Faure Folge** existieren Teilfolgen mit $r \geq 2$ für gemischte Ecken und $r \geq \frac{3}{2}$ für $\mathbf{h} = \mathbf{1}$.

Origin-Avoidance diverser Folgen kleiner Diskrepanz II

Hyperbolische Distanz zu **anderen Ecken** $\mathbf{h} \in \{0, 1\}^s$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ (Harteringer, K., Ziegler (2005)):

- Für die **Halton-Folge** gilt eine hyperbolische Distanz von **mindestens** $\mathcal{O}(1/(N \log N))$ für gemischte Ecken (Beweis über Euler-Theorem).
- Für die **Halton-Folge** gilt $r \leq 1 + \varepsilon$ für gemischte Ecken (Beweis durch Betrachtung der Ziffernentwicklung aufgrund Konstruktion der Halton-Folge durch Spiegelung am Komma \Rightarrow Diophantische Gleichung

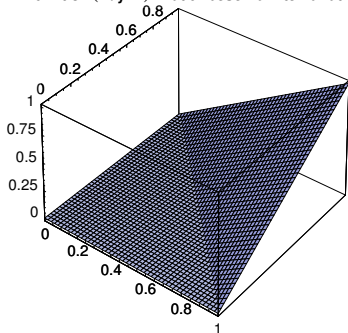
$$1 = c \prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} - D \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}$$

mit Unbekannten $C, D, \beta_k, \alpha_j \in \mathbb{N}$. Zeige $r \leq N^{1+\varepsilon}$ für spezielle N , die Ungl. nicht erfüllen. Schmidt's Subspace Theorem \Rightarrow nur endliche viele andere $N \Rightarrow$ asymptotisch irrelevant)

- Für die **Faure Folge** existieren Teilfolgen mit $r \geq 2$ für gemischte Ecken und $r \geq \frac{3}{2}$ für $\mathbf{h} = \mathbf{1}$.

Offenes Problem: Knicke verursachen unbeschränkte Variation

Funktion $(x+y-1)^+$ hat unbeschränkte Variation



- Variation im Sinne von Hardy & Krause ist unbeschränkt bei Funktionen mit Knick (Owen (2005)).
- Hlawka-Mück Ungleichung nicht anwendbar, um Konvergenz und Ordnung zu zeigen
- Empirisch: Funktioniert trotzdem (z.B. Asiatische Optionen)
- Smoothing des Knickes bringt asymptotisch nichts

Wann funktioniert QMC gut?

Wann funktioniert QMC besonders gut verglichen mit MC?

- Paskov, Traub (1995): Collateralized Mortgage Obligations (30 Jahre, monatlich), 360-dimensionales Problem, QMC weitaus beste Methode
- Asiatische Optionen: Bei 50 Dimensionen ist QMC nicht mehr viel besser als MC bzw. Pfadsimulation

ANOVA-Zerlegung einer Funktion f

Sei $f : U^s \rightarrow \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar. Eine Zerlegung von f der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} f_u(\mathbf{x}),$$

wobei f_u nur von den Koordinaten x_i , $i \in u$, abhängt, heißt ANOVA-Zerlegung, wenn $\int_0^1 f_u(\mathbf{x}) dx_j = 0$ für $j \in u$.

- Für eine ANOVA-Zerlegung gilt $\text{Var}(f) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \text{Var}(f_u)$.

Wann funktioniert QMC gut?

Wann funktioniert QMC besonders gut verglichen mit MC?

- Paskov, Traub (1995): Collateralized Mortgage Obligations (30 Jahre, monatlich), 360-dimensionales Problem, QMC weitaus beste Methode
- Asiatische Optionen: Bei 50 Dimensionen ist QMC nicht mehr viel besser als MC bzw. Pfadsimulation

ANOVA-Zerlegung einer Funktion f

Sei $f : U^s \rightarrow \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar. Eine Zerlegung von f der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} f_u(\mathbf{x}),$$

wobei f_u nur von den Koordinaten x_i , $i \in u$, abhängt, heißt ANOVA-Zerlegung, wenn $\int_0^1 f_u(\mathbf{x}) dx_j = 0$ für $j \in u$.

- Für eine ANOVA-Zerlegung gilt $\text{Var}(f) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \text{Var}(f_u)$.

Effektive Dimension

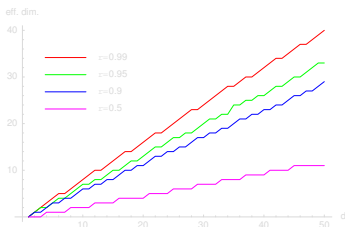
Effektive Dimension einer Funktion f (Paskov/Traub; Caflisch et al.

Effektive Dimension d_t (im Truncation-Sinn): Anteil $r\text{Var}(f)$, $r \approx 1$ (z.B. $r = 0.99$), mit den ANOVA-Termen der Variablen x_1, \dots, x_{d_t} erreicht.

Effektive Dimension d_s (im Superposition-Sinn): Anteil $r\text{Var}(f)$, $r \approx 1$, mit ANOVA-Termen der Kardinalität d_s erreicht (alle Variablen benutzt!).

QMC: Funktionen mit geringer effektiver Dimension.

- CMO Problem hat geringe eff. Dimension (Bridging-Algorithmus)
- Asiatische Optionen haben große effektive Dimension:



Effektive Dimension

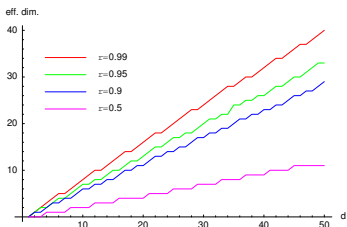
Effektive Dimension einer Funktion f (Paskov/Traub; Caflisch et al.

Effektive Dimension d_t (im Truncation-Sinn): Anteil $r\text{Var}(f)$, $r \approx 1$ (z.B. $r = 0.99$), mit den ANOVA-Termen der Variablen x_1, \dots, x_{d_t} erreicht.

Effektive Dimension d_s (im Superposition-Sinn): Anteil $r\text{Var}(f)$, $r \approx 1$, mit ANOVA-Termen der Kardinalität d_s erreicht (alle Variablen benutzt!).

QMC: Funktionen mit geringer effektiver Dimension.

- CMO Problem hat geringe eff. Dimension (Bridging-Algorithmus)
- Asiatische Optionen haben große effektive Dimension:



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!